

VASILE CHIRIAC
DANUȚ COZMA

MIHAI CHIRIAC
AURICA ȘOVA

Probleme de

matematică,

fizică,

chimie

date la
concursul de admitere
în treapta a II-a de liceu
în anii
1978 - 1986

**Probleme de
MATEMATICĂ, FIZICĂ și CHIMIE**

**date la concursurile de admitere
în treapta a II-a de liceu în anii 1978—1986**

Probleme de **MATEMATICĂ, FIZICĂ și CHIMIE**

date la concursurile de admitere
în treapta a II-a de liceu în anii 1978—1986

Vasile CHIRIAC
Mihai CHIRIAC
Dănuț COZMA
Aurica ȘOVA

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1987

**Problems of
MATHEMATICS, PHYSICS and CHEMISTRY**

submitted to II-nd grade entrance examination
in colleges over the 1978—1986 span

**Задачи по
МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ХИМИИ**

даны на конкурсном экзамене в лицеях,
на второй степени, в 1978—1986 гг.

Prefață

Rezolvarea unei probleme reprezintă o activitate creatoare în cursul căreia, servindu-ne de operații de analiză, sinteză, generalizare, abstractizare, reușim să depășim datele cunoscute și să aflăm cu ajutorul acestora, altele noi.

Matematica, fizica, chimia, operînd cu abstracțiuni, solicită diferite forme de activitate mentală — memorarea și aplicarea unor definiții, teoreme sau principii și legi — perceperea, reprezentarea și reproducerea unor figuri, asocierea între simboluri.

Una din problemele privind modernizarea învățămîntului este munca de creație a elevului în rezolvarea de exerciții și probleme, care îl învață să judece, să gîndească și să construiască un raționament.

Această culegere urmărește formarea calităților creatoare la elevi prin munca lor independentă, individuală. Ea prezintă o selecție de subiecte de examen date la concursurile de admitere la treapta a II-a de liceu în perioada 1978—1986 la matematică, fizică și chimie. Aceste subiecte rezolvate sînt urmate de subiecte propuse la care se dau indicații și răspunsuri.

Rezolvările detaliate ale unor probleme constituie pentru candidat modele operaționale atît din punct de vedere al conținutului cît și ca model de redactare.

Lucrarea este utilă și profesorilor în activitatea desfășurată la catedră.

AUTORII

Cuprins

MATEMATICĂ

I

Subiecte date la examen
9—22

Rezolvări
23—66

II

Subiecte de examen propuse
67—86

Indicații și răspunsuri
87—117

FIZICĂ

I

Subiecte date la examen
119—131

Rezolvări
132—511

II

Subiecte de examen propuse
152—183

Indicații și răspunsuri
184—205

CHIMIE

I

Subiecte date la examen
207—211

Rezolvări
212—237

II

Subiecte de examen propuse
238—243

Indicații și răspunsuri
244—255

I. SUBIECTE date la examen 9—22

MATEMATICĂ

Rezolvări 23—66

× I.1. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$1 \frac{1}{7} + \left(\frac{55}{16} : \frac{\sqrt{756,25}}{\frac{3}{2}x - 9} \right) \cdot \frac{16}{21} = 2.$$

B. Să se demonstreze că suma cuburilor oricăror trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 9.

C. Să se determine valorile naturale ale lui n pentru care

$$A_{n-2}^2 + C_n^2 = 41.$$

D. Un triunghi dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) are catetele de lungimi $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 6$ cm. Fie A' , B' , C' mijloacele laturilor BC , CA , AB și G centrul de greutate al triunghiului.

1. Să se calculeze lungimile segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.
2. Să se arate că patrulaterul $GA'CB'$ poate fi înscris într-un cerc; să se determine lungimea razei acestui cerc.

E. O cutie cubică $ABCD A'B'C'D'$ are laturile de lungime 6 dm, iar capacul $ABCD$ este rabatabil (se poate roti) în jurul laturii AB . După ce în cutie se introduce o piramidă patrulateră regulată $[VA'B'C'D']$, având ca bază fundul cutiei $A'B'C'D'$, capacul nu se mai poate închide. Să se determine volumul piramidei, știind că vârful V atinge capacul atunci când planul acestuia formează cu planul bazei un unghi de 45° .

(Admitere treapta a II-a, licee pedagogice, 1978)

I.2. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad |x^2 - 1| + |x^2 - 4| - 1 = 0.$$

$$2. \quad 2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 - 2x + 1) = \frac{4}{3}.$$

$$3. \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

B. Să se arate că

$$\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = (n - 4)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6.$$

C. Într-o piramidă patrulateră regulată $[VABCD]$, lungimea laturii AB a bazei este a u.l., iar muchiile laterale fac cu planul bazei unghiuri

de măsură 60° . Se cere :

1. Aria laterală și volumul piramidei.
2. Măsura unghiului diedru format de o față laterală cu planul bazei.
3. Cosinusul unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Vâlcea, 1978)

I.3. A. Se dă expresia $E(x) = \log_2(x^2 - 3x + 3)$.

1. Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care expresia $E(x)$ este număr real.

2. Să se studieze semnul lui $E(x)$ pe domeniul de definiție.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases}$$

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x.$$

D. Cunoscând $\cos x = 1/7$, $\cos y = 13/14$ și $x \in (0, \pi/2)$, $y \in (0, \pi/2)$, să se arate că $x - y = \pi/3$.

E. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

F. Într-o piramidă patrulateră regulată se cunosc : lungimile laturilor bazei egale cu $2a$ cm și lungimile muchiilor egale cu $3a$ cm, unde $a > 0$. Se cere :

1. Volumul și aria laterală a piramidei.

2. Volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă care se obține secționând piramida cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul înălțimii piramidei date.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1978)

I.4. A. Se consideră ecuația $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația admite :

1. Rădăcini reale.
2. Rădăcini de același semn.
3. Rădăcini pozitive.

B. Să se calculeze suma :

$$S = \lg \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \lg \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \lg \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

C. Să se rezolve ecuațiile :

1. $2^{x+1} + 2^{3-x} = 8$.
2. $\sin x + \cos x = -1$.

D. Se dă o piramidă triunghiulară $[SABC]$ în care fața laterală SBC este perpendiculară pe planul bazei (ABC) , cu $SB = SC = l$ și măsura unghiului $\widehat{ASB}$ egală cu măsura unghiului $\widehat{BSC}$ și cu măsura unghiului $\widehat{ASC}$, având fiecare măsura de 60° . Să se calculeze volumul piramidei.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Sibiu, 1979)

1.5. A. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1. Determinați pe a, b, c astfel încât -2 să fie o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, iar vârful parabolei să fie punctul $V(0, -4)$.

2. Reprezentați grafic funcția $g: (-2, 0] \cup [2, +\infty) \rightarrow [-4, +\infty)$ dată de relația $g(x) = x^2 - 4$. Este această funcție o bijecție? De ce?

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

1. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448.$

2. $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cdot \cos x.$

C. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$E(x) = \sin(x + 45^\circ) + 3 \sin(x - 45^\circ) + 5 \cos 2x + 3 \cos(2x + 135^\circ),$
pentru $x = 135^\circ$.

D. O perpendiculară d pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic BAC intersectează dreptele AB și AC în S și respectiv T .

1. Să se arate că dreptele CS și BT sînt perpendiculare.

2. Dacă $AB = 16$ cm și $AC = 12$ cm, să se afle volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul dreptei ce include ipotenuza.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Prahova, 1979)

1.6. A. Să se determine numerele reale p și q ($p \neq q$) astfel încît ecuația $x^2 + px + q = 0$ să aibă rădăcinile p și q .

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația

$$\left(\frac{1}{2} + 2x\right)^3 + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^3 \leq 1.$$

2. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a + b = 1$, să se arate că $a^3 + b^3 \geq 1/4$.

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sin 2x + 2 \cdot \cos^2 x = 4 \cos x$.

D. Se consideră un triunghi ABC cu laturile de lungimi $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC , astfel ca dreapta AP să fie perpendiculară pe BC . Fie $A' \in [BC]$ piciorul acestei perpendiculare.

1. Să se calculeze aria triunghiului BPC în funcție de a, b, c , știind că $AP/PA' = 2$.

2. Dreptele BP și PC intersectează pe AC și AB în B' și C' . Presupunind că $AP/PA' = BP/PB' = CP/PC'$, să se arate că triunghiurile PBC , PCA , PAB au aceeași arie.

E. Se consideră un triunghi echilateral cu latura de lungime a . Pe latura AB se ia punctul M și pe latura AC punctul N astfel că $AM = AN = ka$, unde k este un număr real dat, $0 < k < 1$. Fie M', A', N' picioarele perpendicularelor duse din M, A, N respectiv pe BC . Să se calculeze, în funcție de k , raportul volumelor cilindrului și trunchiului de con obținut prin rotirea dreptunghiului $MNN'M'$ și respectiv trapezului $MNOB$ în jurul dreptei AA' .

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1979)

I.7. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y^2 = x^2 - 3x + 3. \end{cases}$$

B. Să se rezolve ecuațiile :

1. $4^x + 2^x = 272.$

2. $\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$

C. Fie M un punct interior triunghiului ABC . Să se arate că $m(\widehat{BMC}) > m(\widehat{BAC})$.

D. Într-un con de rotație raza este de 4 cm, iar generatoarea face cu planul bazei un unghi de 60° . Se cere :

1. Aria laterală și volumul conului.

2. Distanța de la vîrf la planul de secțiune paralel cu baza, pentru care aria secțiunii este $4\pi \text{ cm}^2$.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Bacău, 1980)

I.8. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $2^{x+2} - 2^x = 96.$

2. $\cos 4x = \cos 3x.$

3. $\sin 2x = \sin 5x.$

B. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$, știind că admite rădăcina $x_1 = 2 - i$.

C. Să se demonstreze că triunghiul în care există relația $\cos A + \cos B = \sin C$ este dreptunghic.

D. Într-o prismă patrulateră regulată, aria bazei este de 144 cm^2 și înălțimea de 14 cm. Se cere :

1. Lungimea diagonalei prisme.

2. Aria secțiunii diagonale a prisme.

3. Aria laterală și volumul prisme.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1980)

I.9. A. Fie

$$F(x) = \frac{x^2 + (m+1)x + m+2}{x^2 + x + m},$$

unde m este un parametru real.

Să se determine m astfel încît $F(x)$ să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice x real.

B. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, știind că

$$\begin{cases} x + y + z = -x \\ xy + yz + zx = y \\ xyz = -z. \end{cases}$$

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

D. Fie O, A, B, C patru puncte astfel ca $OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA$ și fie $a = OA, b = OB, c = OC$. Să se arate că :

1. Triunghiul ABC este ascuțitunghic.
2. Proiecția ortogonală a lui O pe (ABC) coincide cu ortocentrul H al triunghiului ABC . Să se calculeze lungimea lui $[OH]$.

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1980)

I.10. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1.$$

$$2. \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + 3y^2 = 5 \\ x^2 - 5xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

C. Să se calculeze unghiurile triunghiului format de bisectoarele exterioare ale unui triunghi ABC cu $m(\hat{B}) = 70^\circ$ și $m(\hat{C}) = 60^\circ$.

D. Baza unui paralelipiped drept este un romb cu diagonalele de 6 cm și 8 cm. Fețele laterale au diagonalele egale cu 13 cm. Se cere aria totală a paralelipipedului.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Timiș, 1981)

I.11. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 9^x - 3^x - 6 = 0.$$

$$2. \quad x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

B. Să se determine m și $n \in \mathbb{R}$ și să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0,$$

știind că admite rădăcina $x_1 = 1 + i$.

C. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele :

$$1. \quad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ 2 \cdot \lg x + 2 \cdot \lg y = 2. \end{cases}$$

D. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$\cos B + \cos C = \operatorname{tg}(A/2) \cdot (\sin B + \sin C)$$

E. Fie ABO , $A'B'O'$ fețele opuse ale unei prisme triunghiulare drepte și fie M mijlocul muchiei $[OO']$. Știind că lungimile laturilor bazei ABO sînt egale cu a u.l. și că planele (ABM) , $(A'B'O')$ formează un unghi de măsură 45° , să se calculeze lungimea înălțimii și aria totală a prisme.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1981)

I.12. A. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$, unde m este un parametru real. Pentru ce valori ale lui m are loc inegalitatea: $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$?

B. În dezvoltarea binomului $(\sqrt[n]{a} + 1/\sqrt[n]{a})^n$ suma coeficienților de rang par este 128. Să se determine n și să se găsească termenul ce-l conține pe a^3 .

C. Folosind forma trigonometrică a numărului complex, să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 - 2z^4 + 2 = 0$.

D. Fie M , N , P , Q proiecțiile unui punct X de pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ pe laturile unui dreptunghi înscris în același cerc. Să se arate că M este ortocentrul triunghiului NPQ .

E. Se consideră o piramidă patrulateră regulată și un cub astfel încît patru din vîrfurile cubului se află în planul bazei piramidei iar celelalte patru vîrfuri se găsesc pe muchiile laterale ale piramidei. Să se calculeze lungimea muchiilor cubului știind că laturile bazei piramidei au lungimea a și înălțimea piramidei are lungimea b .

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1981)

I.13. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

1. $5^{x^2-5x} = 5^{-4}$.

2. $\sin 2x = \cos^2 x$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

C. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel ca polinomul $h = X^4 - mX^3 - 2X^2 - 6X - 1$ să se dividă cu polinomul $k = X + 1$.

D. O suprafață triunghiulară dreptunghică are catetele de lungimi 6 cm și 8 cm. Ea se rotește complet în jurul dreptei ce include cateta de lungimea cea mai mare. Să se calculeze volumul și aria totală a corpului rezultat.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Giurgiu, 1982)

I.14. A. Să se rezolve:

1. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ xy = 3. \end{cases}$

2. $3^{3-x} = 81$.

3. $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$.

4. $\cos x = \sin x$.

B. Să se calculeze $\sin(x + y)$ știind că $\sin x = 1/2$, $\sin y = 1/3$, $x \in (0, \pi/2)$, $y \in (0, \pi/2)$.

C. Lungimile laturilor triunghiului ABC au valorile $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm. Să se calculeze lungimea înălțimii AA' , $A' \in BC$.

D. Un trunchi de con are lungimile razelor bazelor de 2 cm și 7 cm, iar lungimea generatoarei de 13 cm. Se cere :

1. Volumul trunchiului de con.
2. Aria totală a trunchiului de con.
3. Volumul sferei circumscrise trunchiului de con.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1982)

I.15. A. Să se arate că egalitatea $\sqrt[3]{20 + a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - a\sqrt{2}} = 4$ are loc dacă și numai dacă $a = 14$ sau $a = -14$.

B. Să se rezolve ecuația $\log_{2x} 4x + \log_{4x} 16x = 4$.

C. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$m \sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 x = 2,$$

m fiind un parametru real.

D. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor limitate de ortocentru și virfurile triunghiului se găsesc pe un același cerc (numit cercul lui Euler).

E. O piramidă triunghiulară cu virfurile S, A, B, C are $AB \equiv AC$ și $SA = SB = SC = 13$ cm, $BC = 6$ cm și $\sigma[ABC] = 27$ cm².

1. Să se calculeze lungimea înălțimii piramidei corespunzătoare bazei ABC .

2. Perpendiculara în punctul A pe planul triunghiului ABC se intersectează cu planul (SBC) în punctul V . Să se calculeze aria totală și volumul piramidei $[VABC]$.

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1982)

I.16. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 2.$

2. $2 \cdot \lg x = \lg(5x - 4).$

3. $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0.$

4. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}.$

B. Fie $\sin x = 1/2$, cu $x \in (\pi/2, \pi)$. Să se calculeze $\cos x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$.

C. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

D. Fie ecuația $2x^3 - 4x^2 - 7x + m = 0$.

1. Să se determine m astfel încît suma a două rădăcini să fie egală cu 1.

2. Să se afle m pentru care

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 7.$$

E. O piramidă patrulateră regulată are înălțimea 12 cm și apotema bazei 5 cm.

1. Să se afle aria laterală și volumul piramidei.

2. Să se afle raza sferei circumscrise piramidei.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, Bacău, 1983)

I.17. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$:

1. $5^{x^2-x-2} = 625.$

2. $2x^2 - 3x + 1 \geq 0.$

3. $\cos 4x = -1/2.$

B. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația : $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

C. Să se transforme în produs expresia : $E = \sin x + \sin 3x + \sin 5x.$

D. Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f dacă $x_1 + x_2 = x_3$.

E. Într-un con de rotație cu raza $R = 5$ cm și înălțimea $i = 12$ cm se face o secțiune paralelă cu baza avînd aria egală cu 4π cm². Să se calculeze :

1. Aria laterală a trunchiului de con format.

2. Volumul trunchiului de con.

F. Să se arate că în orice triunghi ABC

$$1 + \cos A \cdot \cos(B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2},$$

notațiile fiind cele uzuale.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1983)

I.18. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

B. Fie ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0, a \in \mathbb{R}.$

1. Să se rezolve ecuația în $\mathbb{C}$ în cazul $|a| = 1.$

2. Pentru $|a| < 1$, să se arate că toate rădăcinile ecuației date au modulul egal cu 1.

C. Se dau cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1), \mathcal{C}(O_2, r_2)$. Fie CD tangenta comună exterioară și C, D punctele de tangență. Să se demonstreze că cerul de diametru $[CD]$ intersectează dreapta O_1O_2 dacă și numai dacă cercurile date sînt exterioare.

D. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat și cu unghiul de la vîrfului unei fețe laterale de măsură p .

1. Să se calculeze volumul piramidei înscrise, în funcție de R și p .
2. Să se calculeze valoarea lui p atunci cînd înălțimea piramidei este de aceeași lungime cu raza sferei.

E. Să se arate că dacă în triunghiul ABC $\text{ctg } A + \text{ctg } B = 2 \text{ctg } C$, atunci $a^2 + b^2 = 2c^2$, unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului ABC .

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1983)

I.19. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x - y = 90 \\ \lg x + \lg y = 3. \end{cases}$$

C. Să se determine numerele reale x, y astfel încît

$$(3x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i \quad (i = \sqrt{-1}).$$

D. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc egalitatea

$$b \cdot \cos C - c \cdot \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

E. Un con circular drept care are raza bazei 6 cm și înălțimea 12 cm se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinînd astfel un trunchi de con cu înălțimea 8 cm. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con.

F. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $AB = 3a$ u.l., latura bazei mici $A'B' = a$ u.l. și muchia laterală $AA' = 2a$ u.l. Se cere aria laterală, volumul trunchiului și lungimea înălțimii $[VO]$ a piramidei din care provine trunchiul.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, Bacău, 1984)

I.20. A. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Să se arate că z se poate scrie sub forma $\frac{1 + ai}{1 - ai}$ dacă și numai dacă $|z| = 1$.

B. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ un șir de numere reale nenule. Să se arate că acest șir este o progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \frac{n-1}{x_1 x_n},$$

oricare ar fi $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

C. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x + \cos^3 x = \sqrt{2}/2$.

D. Se consideră un punct P în planul unui triunghi ascuțitunghic ABC . Să se demonstreze că proiecțiile punctului P pe AB, BC și CA sînt trei puncte coliniare dacă și numai dacă punctul P este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC .

E. Se dă un tetraedru $[ABCD]$ în care $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$. Să se arate că :

1. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2$.

2. Mijloacele celor șase muchii se află pe o sferă.

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1984)

I.21. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 2.$$

B. Să se determine p și q astfel încît polinomul $f = pX^{n+2} + qX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

C. Știind că $z + \frac{1}{z} = 2 \cdot \sin \alpha$, să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$ în funcție de n și α , n fiind un număr natural, iar $\alpha \in \mathbb{R}$.

D. Într-un cerc se înscrie un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Două drepte ce trec prin A intersectează latura BC în M și N , iar cercul în M' și N' . Să se arate că patrulaterul $MNN'M'$ este inscrip-tibil.

E. Să se calculeze aria laterală a unui trunchi de con știind că raza bazei mari este egală cu $R\sqrt{3}$ u.l. și că în trunchiul respectiv se poate inscrie o sferă cu raza R u.l.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil pedagogic și economic, 1984)

I.22. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\frac{6}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1} + 1.$

2. $\frac{1}{12} \cdot \lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \cdot \lg x^2.$

3. $\cos 2x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0.$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul :

$$\begin{cases} xy + x + y = 7 \\ xy - 3(x + y) = -9. \end{cases}$$

C. Să se determine parametrul m și să se rezolve ecuația $2x^3 - 4x^2 - 7x + m = 0$, știind că $x_1 + x_2 = 1$.

D. În triunghiul BAC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) se duce înălțimea AD ($D \in BC$). Se unește D cu mijloacele E și F ale laturilor AB și AC . Să se arate că patrulaterul $AEDF$ este inscrip-tibil și are diagonalele perpen-diculare.

E. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor 9 u.l. și 15 u.l. iar generatoarea 10 u.l. Să se afle :

1. Aria totală și volumul trunchiului de con.

2. Aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul de con.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Bacău, 1985)

I.23. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații :

1. $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0.$

2. $\cos^2 x - 2 \sin x - 1 = 0.$

3. $x^3 - x - 24 = 0.$

B. Determinați valoarea numărului natural n , dacă se cunoaște că polinomul $f = 14 \cdot X^n - X^{n-1} - 8 \cdot 3^{n-1}$ se divide cu polinomul $X-2$.

C. Lungimea generatoarei unui trunchi de con circular drept este a . Trunchiul de con este circumscris unei sfere de rază b . Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con.

Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Cluj, 1985)

I.24. A. Rezolvați :

1. $x^2 - x - 2 \leq 0.$

2. $5^{1-2x} = 125.$

3.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6. \end{cases}$$

B.1. Aflați citul și restul împărțirii polinomului $f = 2X^4 - X^3 - X - 1$ la binomul $g = X + 1$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația : $3 \cos^2 x - \cos x = 0.$

3. Arătați că în orice triunghi ABC există relația :

$$\frac{b+c}{2c \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + C \right)}{\sin (A+B)}.$$

C. Se dă un con circular drept în care α este măsura unghiului format de înălțime cu generatoarea, iar r este raza sferei înscrisă în con.

1. Să se exprime în funcție de α și r aria laterală a conului.

2. Determinați α astfel încât această arie să fie egală cu $3\pi r^2 / \sin \alpha$.

3. Calculați volumul sferei circumscrisă conului dat, în funcție de α și r .

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1985)

I.25. A. Să se rezolve ecuațiile :

1. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0.$

2. $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0.$

3. $\log_{\frac{2x-1}{x+1}}(x^2 - 3x + 3) = 0.$

4. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

B. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului real a inecuația :

$$\log_a x - \log_a x + \log_a x \geq \frac{3}{4}.$$

C. Să se arate că în orice triunghi are loc relația :

$$b \cdot \cos C + c \cdot \cos B = a.$$

D. Fie ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $|a| < 1$. Să se arate că soluțiile ecuației sînt egale în modul cu 1.

E. Fie ABC un triunghi în care $BC = 4$, înălțimea $AH = \sqrt{3}$ și unghiul B este egal cu 30° . O paralelă la BC taie pe AB și AC în D , respectiv E , iar înălțimea AH în I . Se cere :

1. Să se calculeze lungimile laturilor AB , AC , BH .

2. Știind că $IH = \sqrt{3}/3$, să se calculeze BD , EC , DE .

3. Să se calculeze aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței trapezoidale $[BDEC]$ în jurul lui BC .

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Argeș, 1985)

I.26. A. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y = 13. \end{cases}$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația

$$\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) \leq 1 + \lg (2^{x-2} + 1).$$

C. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 = i$.

D. Se consideră un patrulater convex și fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Să se arate că proiecțiile lui O pe laturile patrulaterului convex sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil dacă și numai dacă patrulaterul dat are diagonalele perpendiculare.

E. Un trunchi de con circular drept are aria laterală egală cu $4\pi a^2$ și înălțimea egală cu a , iar generatoarea este egală cu suma razelor bazelor. Să se calculeze în funcție de a razele bazelor și aria laterală a conului din care provine trunchiul de con.

F.1. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$p = 4R \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

2. Să se afle aria triunghiului ABC dacă $a = \sqrt{6}$, $b + c = 3 + \sqrt{3}$ și $m(\hat{A}) = 60^\circ$.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil pedagogic și economic, 1985)

I.27. A. Să se rezolve și să se discute în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + m\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2,$$

unde m este un parametru real.

B. Din 7 ingineri și 4 maiștri se aleg 5 persoane pentru a se forma o echipă de intervenție. În cîte moduri se poate alcătui această echipă, știind că în componența ei trebuie să intre cel puțin 2 maiștri?

C. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 = i\bar{z}$ ($\bar{z}$ fiind conjugatul lui z și i unitatea imaginară).

D. Trei cercuri congruente care au un punct comun H se mai intersectează două câte două în punctele A , B și C . Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile date.

E. Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare și $E \in (AD)$. Să se arate că următoarele afirmații sint echivalente :

1. Semiplanul închis limitat de dreapta BC și conținând punctul E este semiplan bisector al unghiului diedru definit de semiplanele închise limitate de dreapta BC și care conțin punctele A și D .

2. Punctul E împarte muchia AD în segmente proporționale cu ariile fețelor ABC și DBC .

F.1. Să se arate că în orice triunghi ABC avem :

$$r = 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

2. Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC știind că $A - B = 2\pi/3$ și $R = 8r$ (R și r fiind raza cercului circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC).

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1985)

I.28. A.1. Să se rezolve ecuația $x^3 - 4x = 0$.

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

3. Să se rezolve inecuația : $\frac{x}{2-x} < 1$.

B.1. Să se determine soluțiile ecuației $\sin 2x = \cos x$ situate în intervalul $[0, 2\pi]$.

2. Să se simplifice expresia :

$$E = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin x}.$$

3. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $a = 6$ cm, $m(\hat{B}) = 60^\circ$ și $m(\hat{C}) = 45^\circ$.

C. Fie $[ABODA'B'C'D']$ un paralelipiped drept avînd muchiile laterale AA' , BB' , CC' , DD' , iar baza $ABCD$ un romb cu lungimea laturii a și $m(\hat{ADC}) = 60^\circ$. Aria laterală a paralelipipedului este egală cu $8a^2$. Să se calculeze :

1. Volumul paralelipipedului.

2. Aria triunghiului $A'BD$ și distanța de la punctul A la planul $A'BD$.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil economic, pedagogic, chimic, construcții etc., 1986)

I.29. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $x^3 + x^2 - 2x = 0$.

2. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația

$$4^x + 2^{x+1} \leq 288.$$

C. Fie x și y numere reale strict pozitive astfel încât $x - y = x^3 + y^3$. Să se arate că $(x^2 + y^2 - 1)(x - y) < 0$ și că $x^2 + y^2 < 1$.

D. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $a = 6$ cm, $m(\hat{A}) = 60^\circ$ și $b + c = 9$ cm.

E. Să se determine numerele complexe z de modul 1 astfel ca $|z^2 + \bar{z}^2| = 2$.

F.1. Fie un pătrat $ABCD$ de latură a . Pe latura CD se consideră un punct E . Bisectoarea interioară a unghiului BAE intersectează BC în F și fie $m(\widehat{BAF}) = \alpha$. Să se calculeze lungimile segmentelor $[AE]$, $[AF]$, precum și raportul $\frac{DE + BF}{AE}$.

2. Un paralelipiped are toate cele 6 fețe romburi cu latura a și unghiul ascuțit de 60° . Să se calculeze lungimea diagonalei mai lungi a paralelipipedului.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil matematică-fizică, aeronautică, electrotehnică, mecanică etc., 1986)

I. Subiecte date la examen 9—22

REZOLVĂRI 23—66

I.1. A. După efectuarea operațiilor, ecuația se scrie succesiv :

$$\frac{55}{16} \cdot \frac{3(x-6)}{27,5 \cdot 2} \cdot \frac{16}{21} = 2 - \frac{8}{7} \Leftrightarrow \frac{x-6}{7} = \frac{6}{7}, \text{ de unde } x = 12.$$

B. Fie $a - 1, a, a + 1$ trei numere naturale consecutive oarecare. Avem : $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = 3a^3 + 6a = 3a(a^2 + 2)$.

Pot exista următoarele posibilități :

1°. $a = M3$. Se obține $3a(a^2 + 2) = M9$ și proprietatea este demonstrată.

2°. $a = M3 + 1, a^2 = M3 + 1$ și $a^2 + 2 = M3$. Deci $3a(a^2 + 2) = M9$, adică proprietatea este adevărată.

3°. $a = M3 + 2, a^2 = M3 + 1$, de unde $3a(a^2 + 2) = M9$ și proprietatea este demonstrată.

C. Din enunț rezultă condiția $n - 2 \geq 2$, adică $n \geq 4$ și ecuația se scrie succesiv : $(n - 2)(n - 3) + n(n - 1)/2 = 41 \Leftrightarrow 3n^2 - 11n - 70 = 0$, de unde $n_1 = 7 > 4$ este soluția ecuației ($n_2 = -10/3 \notin \mathbb{N}$).

D.1. Triunghiul BAC fiind dreptunghic, rezultă că lungimea medianei AA' este jumătate din ipotenuza BC (fig. I.1.D.1). Teorema lui Pitagora conduce la $BC = \sqrt{72 + 36} = 6\sqrt{3}$ cm și deci $AA' = 3\sqrt{3}$ cm.

Pentru calculul lungimilor celorlalte mediane se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice BAB' și CAC' ; se obțin rezultatele : $BB' = 9$ cm, $CC' = 3\sqrt{6}$ cm.

2. Din $A'B'$ linie mijlocie în $\triangle ABC$, rezultă $A'B' \parallel AB$ și $\triangle A'B'C$ dreptunghic în B' ; în plus, cercul circumscris $\triangle A'B'C$ are diametrul $A'C$. Folosind $A'C = 3\sqrt{3}$ cm, $OG = 2OC'/3 = 2\sqrt{6}$ cm, $A'G = AA'/3 = \sqrt{3}$ cm, se verifică ușor că $A'C^2 = GO^2 + A'G^2$, adică $\triangle A'GC$ este dreptunghic cu $m(\widehat{AGO}) = 90^\circ$. Cercul circumscris $\triangle dr. A'GC$ are același diametru $A'C$ ca cercul circumscris $\triangle dr. A'B'C$ și deci patrulaterul $GA'CB'$ este inscribibil în cercul de rază $R = A'C/2 = 3\sqrt{3}/2$ cm.

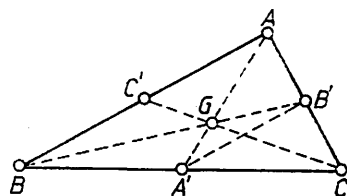


Fig. I.1.D.1

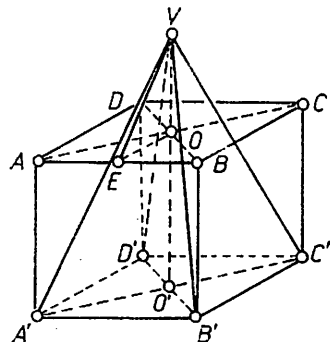


Fig. I.1.E

E. Fie $VO \perp (ABCD)$ și $OE \perp AB$ (fig. I.1.E); conform teoremei celor trei perpendiculare, $VE \perp AB$. Unghiul făcut de planul capacului rabatabil cu planul bazei are măsura $m(\widehat{VEO}) = 45^\circ$, astfel că $\triangle VOE$

este dreptunghic isoscel: $VO = OE = 3$ dm. Înălțimea piramidei este $VO' = VO + OO' = 9$ dm și $V(P) = 108$ dm³.

1.2. A.1. Folosim semnul funcției de gradul doi și definiția valorii absolute :

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \\ -x^2 + 1, & \text{dacă } x \in (-1, 1), \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty), \\ -x^2 + 4, & \text{dacă } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

În raport cu intervalele de explicitare ale valorilor absolute, deosebim cazurile :

1°. $x \in (-\infty, -2]$; ecuația se scrie $x^2 - 1 + x^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 6$, de unde $x_1 = -\sqrt{3} \notin (-\infty, -2]$ și $x_2 = \sqrt{3} \notin (-\infty, -2]$ și deci ecuația nu admite soluții.

2°. $x \in (-2, -1]$; ecuația are forma: $x^2 - 1 - x^2 + 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$, imposibil.

3°. $x \in (-1, 1)$; ecuația este: $-x^2 + 1 - x^2 + 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4 = 0$, de unde $x_1 = -\sqrt{2} \notin (-1, 1)$, $x_2 = \sqrt{2} \notin (-1, 1)$, adică ecuația nu are soluții.

4°. $x \in [1, 2)$; ecuația devine: $x^2 - 1 - x^2 + 4 - 1 = 0$, imposibil.

5°. $x \in [2, +\infty)$; ecuația se scrie: $x^2 - 1 + x^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 6$, care nu are soluții în $[2, +\infty)$.

Prin urmare ecuația (1) nu are soluții reale.

2. Se impun următoarele condiții de existență: $x > 0$, $x \neq 1$. Aplicând proprietățile logaritmilor, ecuația se scrie :

$$\begin{aligned} 2 \log_8 (2x) + 2 \log_8 |x - 1| &= 4/3 \Leftrightarrow \log_8 (2x \cdot |x - 1|) = \\ &= \log_8 8^{2/3} \Leftrightarrow 2x \cdot |x - 1| = 4. \end{aligned}$$

Explicitând valoarea absolută și ținând seama de condițiile de existență, deosebim următoarele cazuri :

1°. $x \in (0, 1)$; ecuația are forma $x(1 - x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$, $x_{1,2} = (1 \pm i\sqrt{7})/2 \in \mathbb{C}$, adică $x_{1,2} \notin (0, 1)$ și deci ecuația nu are soluții reale.

2°. $x \in (1, +\infty)$; ecuația devine $x(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \notin (1, +\infty)$, $x_2 = 2 \in (1, +\infty)$. Rezultă că ecuația are soluția $x = 2$.

3. Cu notația $\sin x = u$, $\cos x = v$, ecuația împreună cu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ne conduc la sistemul $u + v = \sqrt{2}$, $u^2 + v^2 = 1$, cu soluția $u = v = \sqrt{2}/2$, adică $\sin x = \cos x = \sqrt{2}/2$. Prin urmare $x \in \{\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Altfel, folosind $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, ecuația se scrie succesiv astfel :

$$\begin{aligned} \sin x + \operatorname{tg}(\pi/4) \cos x &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x \cos(\pi/4) + \cos x \sin(\pi/4) = \\ &= \sqrt{2} \cos(\pi/4) \Leftrightarrow \sin(x + \pi/4) = 1, \end{aligned}$$

de unde $x \in \{(-1)^k \pi/2 + k\pi - \pi/4 | k \in \mathbb{Z}\}$.

B. Din definiția aranjamentelor rezultă condiția $n \geq 6$. Aplicând formula $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$, se poate scrie :

$$\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)[(n-5)+1]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = (n-4)^2, \forall n \geq 6, n \in \mathbb{N}.$$

Altfel, se aplică formula $A_n^{k+1} = (n-k) \cdot A_n^k$ și se obține :

$$\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = \frac{(n-5)(n-4) \cdot A_n^4 + (n-4) \cdot A_n^4}{A_n^4} = (n-4)^2, \forall n \geq 6, n \in \mathbb{N}.$$

C.1. În notațiile din figura I.2.C avem : $\triangle ABC$ — dreptunghic în B și $\triangle AOV$ dreptunghic în O și $m(\widehat{OAV}) = 60^\circ$ ($VA = AO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a\sqrt{6}/2$ u.l.). Aplicînd teorema lui Pitagora în $\triangle VOE$, se obține $VE = a\sqrt{7}/2$ u.l. Deci $\sigma_i(P) = (1/2) \cdot 4a \cdot a\sqrt{7}/2 = a^2\sqrt{7}$ u.a. și $\varphi(P) = (1/3) \cdot a^2 \cdot a\sqrt{6}/2 = a^3\sqrt{6}/6$ u.v.

2. Din $VO \perp (ABCD)$ și $OE \perp BC$, potrivit teoremei celor trei perpendiculare, rezultă $VE \perp BC$. Măsura unghiului diedru format de fața (VBO) cu planul bazei $(ABCD)$ este $m(\widehat{VEO})$ și $\cos(\widehat{VEO}) = OE/VE = 1/\sqrt{7} \Leftrightarrow m(\widehat{VEO}) = \arccos(1/\sqrt{7})$.

3. Fie $AF \perp VD$ și $CF \perp VD$; unghiul diedru format de două fețe laterale alăturate

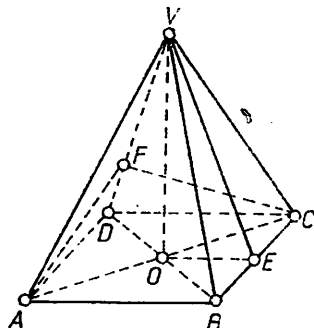


Fig. I.2.C

are măsura $m(\widehat{AFC})$. Din $\sigma[VDC] = VD \cdot FC/2$ rezultă $FC = 2\sigma[VDC]/VD$, cu $VD = AV = AO/\cos 60^\circ = a\sqrt{2}$ și $\sigma[VDC] = (1/4) \sigma_i(P)$, se obține $FC = a\sqrt{14}/4$. În continuare, $\triangle dr. AFD \equiv \triangle dr. CFD$ ($AD = CD, DF = DF$), astfel că $AF = FC$. Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul isoscel AFC : $AC^2 = AF^2 + FC^2 - 2AF \cdot FC \cdot \cos(\widehat{AFC})$, se obține $\cos(\widehat{AFC}) = -1/7$.

I.3. A.1. Logaritmul dintr-un număr real strict pozitiv este un număr real. Prin urmare, trebuie ca $x^2 - 3x + 3 > 0$. Realizantul (discriminantul) trinomului $x^2 - 3x + 3$ este $\Delta = -3 < 0$, astfel că $x^2 - 3x + 3 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. Deoarece baza logaritmului este mai mare ca 1, rezultă că $E(x) > 0$ pentru acele valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 - 3x + 3 > 1$. Rezolvînd această inecuație se obține $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Pentru $x = 1$ sau $x = 2$, $x^2 - 3x + 3 = 1$ și atunci $E(x) = 0$, iar pentru $x \in (1, 2)$, $0 < x^2 - 3x + 2 < 1$ și $E(x) < 0$.

B. Sistemul se scrie :

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 49 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemele :

$$\begin{cases} x+y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y = -7 \\ xy = 12, \end{cases}$$

care conduc la ecuațiile de gradul doi :

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \Rightarrow z_1 = x = 3, z_2 = y = 4 \quad \text{sau } x = 4, y = 3;$$

$$t^2 + 7t + 12 = 0 \Rightarrow t_1 = x = -4, t_2 = y = -3 \text{ sau } x = -3, y = -4.$$

Deci soluțiile sistemului sînt :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -4 & -3 & 3 & 4 \\ \hline y & -3 & -4 & 4 & 3 \end{array}$$

C. Se scrie ecuația sub forma :

$$\sin 2x - \sin x = \cos 2x + \cos x$$

și se folosesc formulele :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} ;$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$$

Ecuația devine :

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{3x}{2} \cdot \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

De aici rezultă : $\cos \frac{3x}{2} = 0$ (1), sau $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$ (2). Din

(1) se obține $\frac{3x}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, iar din

(2) : $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației date este :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D. Funcția $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este descrescătoare pe $[0, \pi]$. Deoarece $\cos x = 1/7 < 13/14 = \cos y$, rezultă $x > y$ și deci $x - y \in (0, \pi/2)$. Aplicînd funcția cosinus, obținem $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$. Valorile pentru $\sin x$ și $\sin y$ se calculează folosind $\cos x = 1/7$, $x \in (0, \pi/2)$ și $\cos y = 13/14$, $y \in (0, \pi/2)$, care se înlocuiesc în $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - 1/49} = 4\sqrt{3}/7$, $\sin y = \sqrt{1 - 169/196} = 3\sqrt{3}/14$.

Prin urmare, $\cos(x - y) = 1/2$, de unde $x - y = \pi/3 \in (0, \pi/2)$.

E. Din teorema sinusurilor rezultă $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ se scrie succesiv astfel :

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2R \sin A}{2R \sin B + 2R \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}} \quad (1)$$

Dar $\sin \frac{A}{2} \neq 0$, $\cos \frac{A}{2} \neq 0$, deoarece $A \in (0, \pi)$, iar din $A + B + C = \pi$ avem: $\sin \frac{B+C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)$ astfel că, în continuare, relația (1) se scrie:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \cdot \cos \frac{B-C}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - \cos^2 \frac{A}{2} = 0,$$

de unde $\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{A}{2} = 0$ sau $-2 \sin \frac{B-C+A}{4} \cdot \sin \frac{B-C-A}{4} = 0$.

De aici rezultă $A + B - C = 0$, cu $A + B + C = \pi$, de unde $C = \pi/2$, sau $B - C - A = 0$, cu $A + B + C = \pi$, de unde $B = \pi/2$ (relația dată are loc dacă triunghiul ABC este dreptunghic în C sau în B).

Comentariu. Dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic în C sau în B , atunci are loc relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$.

Într-adevăr, presupunem $\triangle ABC$ dreptunghic în B , adică $b^2 = a^2 + c^2$. Atunci $\cos A = c/b$ și $\operatorname{tg}(A/2) = \sqrt{(1 - \cos A)/(1 + \cos A)}$, sau prin înlocuire se obține:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b+c} = \frac{a}{b+c}.$$

F. 1. În notațiile figurii I.2.C, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice BEV și $OE'V$, se obține $VE = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$ cm; $OV = \sqrt{8a^2 - a^2} = a\sqrt{7}$ cm și deci $\mathcal{V}(P) = 4a^3\sqrt{7}/3$ cm³; $\sigma_1(P) = 8a \cdot 2a\sqrt{2}/2 = 8a^2\sqrt{2}$ cm².

2. Fie $O' \in VO$ astfel ca $OO' = O'V = a\sqrt{7}/2$ cm. Planul dus prin O' paralel cu baza determină pe VE punctul E' astfel că $EE' = E'V = a\sqrt{2}$ cm și $O'E' = OE/2$ ca fiind linie mijlocie cu $\triangle VOE$. Fie $A'B'C'D'$ pătratul obținut prin secționarea piramidei cu planul dus prin O' paralel cu planul bazei. Atunci $\sigma[A'B'C'D'] = a^2$ și $\mathcal{V}(T) = (a\sqrt{7}/6)(4a^2 + a^2 + 2a^2) = 7a^3\sqrt{7}/6$ cm³; $\sigma_1(T) = (8a + 4a) \cdot a\sqrt{2}/2 = 6a^2\sqrt{2}$ cm².

I.4. A.1. Ecuația admite rădăcini reale dacă $\Delta = m^2 - (m-1) \cdot (m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 3m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \in [2/3, +\infty)$.

2. Ecuația admite rădăcini de același semn dacă $\Delta \geq 0$ și $P = (m-2)/(m-1) \geq 0$, adică $m \in [2/3, +\infty) \cap \{(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)\} \Rightarrow m \in [2/3, 1) \cup [2, +\infty)$.

3. Ecuația admite rădăcini pozitive dacă $\Delta \geq 0$, $P \geq 0$, $S > 0$. Dar $S = 2m/(m-1) > 0$ pentru $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, astfel că ecuația dată admite rădăcini pozitive pentru $m \in [2, +\infty)$.

B. Făcând calculele și apoi transformând în produs, se obține:

$$\begin{aligned} S &= \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \dots + \lg \frac{n-1}{n} = \\ &= \lg \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \right) = \lg \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

sau $S = -\lg n$.

C.1. Scriem ecuația sub forma $2 \cdot 2^x + 8/2^x = 8$; se notează $2^x = t > 0$ și se obține ecuația de gradul doi: $t^2 - 4t + 4 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = t_2 = 2$. Din $2^x = 2$ rezultă $x = 1$ soluția ecuației date.

2. Ecuația se scrie

$$\sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

cu soluțiile

$$x \in \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observație. Ecuația se poate rezolva și prin metoda prezentată la I.2. A.3.

D. Deoarece $\triangle SBC$ are $SB = SC = l$ și $m(\widehat{BSO}) = 60^\circ$, rezultă că $\triangle SBC$ este echilateral, adică $BC = l$ și înălțimea $\triangle SBC$ este înălțimea piramidei $SD = l\sqrt{3}/2$ ($(SBC) \perp (ABO)$, fig. I.4.D).

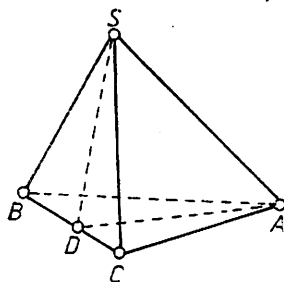


Fig. I.4.D

Din $\triangle SAB \equiv \triangle SAC$ (cazul L.U.L.) rezultă $AB = AC$, adică $\triangle ABC$ este isoscel și AD — înălțime. Teorema cosinusului, aplicată $\triangle SAB$, se scrie:

$$AB^2 = l^2 + AS^2 - 2l \cdot AS \cdot \cos 60^\circ. \quad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice SDA și ADB rezultă $AS^2 = 3l^2/4 + AD^2$ și $AB^2 = l^2/4 + AD^2$, care conduc la

$$AS^2 - AB^2 = l^2/2. \quad (2)$$

Folosind (1) și (2), se obține $AS = 3l/2$ și atunci, din $AD^2 = AS^2 - SD^2$, avem $AD = l\sqrt{6}/2$ și deci $\sigma[ABC] = l^2\sqrt{6}/4$.

În final rezultă

$$\mathfrak{V}(P) = (1/3) \cdot SD \cdot \sigma[ABC] = l^3\sqrt{2}/8.$$

I.5. A.1. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ x_v = 0 \\ y_v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = -4 \end{cases} \Rightarrow b = 0, c = -4, a = 1$$

și $f(x)$ se scrie: $f(x) = x^2 - 4$.

2. Tabelul de variație pentru funcția g este:

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	3	$+\infty$
$y = g(x)$	$-\infty$	-3	-4	0	5	$+\infty$	

Graficul funcției este trasat cu linie continuă în figura I.5.A.2. Din grafic se observă că funcția $g(x)$ este injectivă pentru că orice paralelă la

axa Ox , $y = \alpha$ cu $\alpha \in [-4, +\infty)$, intersectează graficul într-un punct. Funcția este și surjectivă, pentru că oricare ar fi $y \in [-4, +\infty)$ există cel puțin un $x_1 = -\sqrt{4+y} \in (-2, 0]$ sau $x_2 = \sqrt{4+y} \in [2, +\infty)$. Deci funcția g este o bijecție.

B.1. Ecuația se scrie :

$$2^{x-3} \cdot (2^2 + 2 + 1) = 448 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^{x-3} = 448 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{x-3} = 64 \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^6$$

de unde, datorită injectivității funcției exponențiale, $x - 3 = 6$, adică $x = 9$.

2. Funcția tangentă este definită pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ecuația rezolvându-se în această mulțime. Ecuația se scrie succesiv astfel :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0,$$

de unde

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ adică } x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \\ \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

sau $\sin x = -\sqrt{2}$, ecuație care nu admite soluții.

C. Pentru $x = 135^\circ$ se obține: $E(135^\circ) = \sin 180^\circ + 3 \sin 90^\circ + 5 \cos 270^\circ + 3 \cos 405^\circ = 3 + 3 \cos 45^\circ = 3(2 + \sqrt{2})/2$.

D.1. În $\triangle BOS$ (fig. I.5.D.1), T este punctul de intersecție al înălțimilor AO și SD . Prin urmare, BT este înălțime în $\triangle BOS$, adică $BT \perp OS$.

2. Fie A' simetricul lui A față de dreapta BC și O punctul de intersecție al dreptelor BC și AA' (fig. I.5.D.2). Volumul corpului de rotație

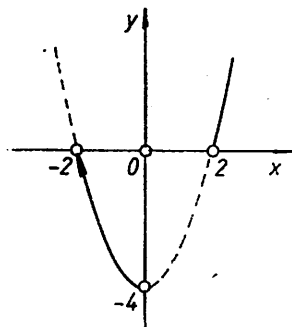


Fig. I.5.A.2.

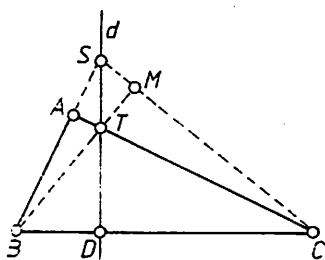


Fig. I.5.D.1

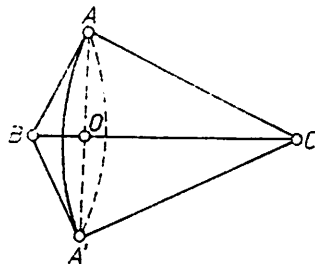


Fig. I.5.D.2

este dat de suma volumelor conurilor ce au ca bază cercul de diametru AA' și ca înălțime BO , respectiv OC . Deci : $\mathcal{V}(\text{corp}) = (\pi \cdot AO^2/3)(BO + OC) = \pi \cdot AO^2 \cdot BC/3$.

Dar $BC = \sqrt{256 + 144} = 20$ cm, iar AO se calculează scriind în două moduri aria $\triangle ABC$: $\sigma[ABC] = AB \cdot AC/2 = AO \cdot BC/2$; se obține $AO = 48/5$ cm și atunci $\mathcal{V}(\text{corp}) = 3072 \pi/5$ cm³.

I.6. A. Folosind formulele lui Viète se obține sistemul :

$$\begin{cases} p + q = -p \\ p \cdot q = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2p \\ pq - q = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 1, q = -2$$

(soluția $p = 0, q = 0$ nu convine deoarece $p \neq q$).

B.1. Folosind formula $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$, inecuația se scrie succesiv :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + 2x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + 2x\right)\left(\frac{1}{2} - 2x\right) + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2 &\leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12x^2 + \frac{1}{4} &\leq 1 \Leftrightarrow 16x^2 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

de unde $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

2. Folosind inegalitatea $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq ((a+b)/2)^2$ și faptul că $a + b = 1$, rezultă $ab \leq 1/4$. Dar $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1 - 3ab$. Din $-3ab \geq -3/4$ și $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$, rezultă $a^3 + b^3 \geq 1/4$.

C. Înlocuind $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ecuația se scrie : $\cos x \cdot (\sin x + \cos x - 2) = 0$, de unde $\cos x = 0$, adică

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

și $\sin x + \cos x - 2 = 0$, egalitate imposibilă deoarece funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$ are valoarea maximă $\sqrt{2}$.

Într-adevăr, $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$, de unde $|f(x)| \leq \sqrt{2}$, pentru că $|\sin(x + \pi/4)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației date este :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ sau } S = \left\{ \frac{\pi}{2} + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D.1. Segmentul $[AA']$ fiind înălțime în $\triangle ABC$, avem $AA' = h_a = (2/a) \cdot \sigma[ABC]$ și folosind $AP/PA' = 2$, cu $AP + PA' = h_a$, rezultă $PA' = h_a/3$. Deci $\sigma[BPO] = a \cdot PA'/2 = (1/3) \cdot (a \cdot h_a)/2 = (1/3) \sigma[ABC]$, unde $\sigma[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cu $2p = a + b + c$ (formula lui Heron).

2. Din $\frac{AP}{PA'} = \frac{BP}{PB'} = \frac{CP}{PC'} = 2$ rezultă $PA' = \frac{1}{3} \cdot AA', PB' = \frac{1}{3} \cdot BB', PC' = \frac{1}{3} \cdot CC'$.

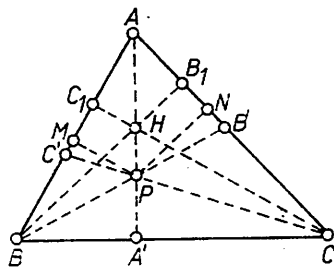


Fig. I.6.D.2

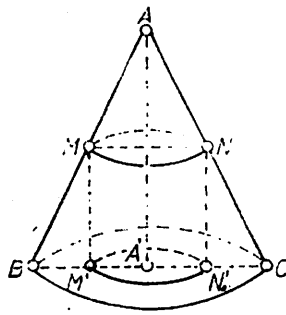


Fig. I.6.E

Fie H punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC (fig. I.6.D.2). Prin P se duc perpendicularele PM, PN pe AB și respectiv AC . Din $\triangle PC'M \sim \triangle CC_1C_1$ și $\triangle PB'N \sim \triangle BB_1B_1$ și rezultatele de mai sus, se obține $PM = CC_1/3, PN = BB_1/3$, unde $CC_1 = h_c$ și $BB_1 = h_b$. De aici rezultă

$$\sigma[PAB] = \sigma[PCA] = \sigma[PBC] = (1/3) \cdot \sigma[ABC].$$

Observație. P este centrul de greutate al $\triangle ABC$ și din AA' înălțime și mediană, rezultă $\triangle ABC$ isoscel ($AB \equiv AC$).

E. Din $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ (fig. I.6.E) și $AM = AN = ka$, rezultă $MN = ka$. Raza bazei mici a trunchiului de con este egală cu raza cilindrului, adică $r = ka/2$, iar raza bazei mari a trunchiului de con este $R = a/2$. Dacă h este înălțimea celor două corpuri, atunci:

$$\frac{V(C)}{V(T)} = \pi \cdot \left(\frac{ka}{2}\right)^2 \cdot h : \frac{\pi h}{3} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2 k}{4} + \frac{k^2 a^2}{4}\right)$$

Efectuind calculele se obține

$$\frac{V(C)}{V(T)} = \frac{3k^2}{1 + k + k^2}.$$

I.7. A. Din prima ecuație a sistemului rezultă $y = 1 - 2x$ și folosind a doua ecuație se obține $1 - 4x + 4x^2 = x^2 - 3x + 3$, sau $3x^2 - x - 2 = 0$, de unde $x_1 = 1, x_2 = -2/3$. Înlocuind valorile lui x se obține $y_1 = -1, y_2 = 7/3$. Deci soluțiile sistemului sînt $(1, -1), (-2/3, 7/3)$.

B.1. Notînd $2^x = t > 0$, ecuația se transformă în $t^2 + t - 272 = 0$, cu $t_1 = 16$, iar $t_2 = -17 < 0$ nu convine. Deci $2^x = 16$, de unde $x = 4$.

2. Grupînd, ecuația se scrie astfel: $\sin x(\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - 1) = 0$, de unde rezultă ecuațiile $\cos x - \sin x = 0$ și $\sin x - 1 = 0$. Prima ecuație se scrie $\tan x = 1$, de unde $x \in \{\pi/4 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, iar ecuația a doua conduce la $x \in \{(-1)^l \cdot \pi/2 + l\pi | l \in \mathbb{Z}\}$. Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației date este:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^l \cdot \frac{\pi}{2} + l\pi | l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. Fie $M \in \text{Int } \triangle ABC$ și N punctul de intersecție a dreptelor BM și AC (fig. I.7.C.). Pentru a demonstra că $m(\widehat{BMC}) > m(\widehat{BAC})$, aplicăm teorema unghiului exterior. În $\triangle ABN$ unghiul $\widehat{BNC}$ este exterior și

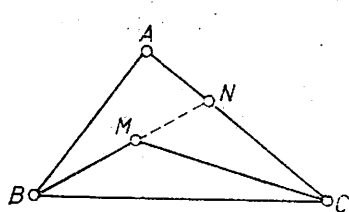


Fig. I.7.C

$m(\widehat{BNC}) > m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{BAC})$. La fel, pentru $\triangle CMN$ unghiul $\widehat{BMC}$ este exterior și $m(\widehat{BMC}) > m(\widehat{MNC}) = m(\widehat{BNC})$. Din cele două inegalități rezultă $m(\widehat{BMC}) > m(\widehat{BAC})$.

Observație. Punctul M fiind interior

$\triangle ABC$, avem $m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - [m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{ACB})] = 180^\circ - [m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{ACM}) + m(\widehat{MCB})] < 180^\circ - [m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{MCB})] = m(\widehat{BMC})$.

D.1. Fie AB diametrul bazei conului (fig. I.7.D). Potrivit datelor problemei, $AB = 8$ cm și $AV = AB$, pentru că $\triangle AVB$ este echilateral [$m(\widehat{VAB}) = 60^\circ$]; deci $\sigma_i(C) = \pi RG = 32 \pi \text{ cm}^2$.

Din $\triangle AOV$ dreptunghic, se obține $VO = 4\sqrt{3}$ cm și atunci

$$V(O) = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{64 \pi \sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

2. Fie $A'O' = r$ raza cercului de secțiune. Din egalitatea $\pi r^2 = 4\pi$, rezultă $r = 2$ cm, iar din $\triangle VA'O' \sim \triangle VAO$ se obține $VO'/VO = A'O'/AO$, de unde $VO' = 4\sqrt{3} \cdot 2/4 = 2\sqrt{3}$ cm. Acest rezultat ne spune că planul (P) trece prin mijlocul înălțimii conului $VO(P \parallel \mathcal{C}(O, AO) \Rightarrow P \perp VO)$.

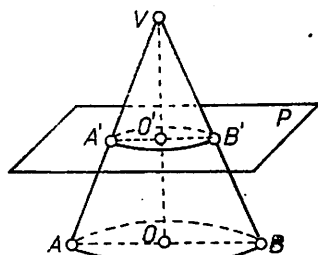


Fig. 1.7.D

1.8. A.1. Ecuația se scrie succesiv : $2^x(4-1) = 96 \Leftrightarrow 2^x = 32$, de unde $x = 5$.

2. Ecuația se scrie $\cos 4x - \cos 3x = 0$ sau transformând în produs, $-2 \sin(7x/2) \cdot \sin(x/2) = 0$, de unde

$$\sin \frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ sau } \sin \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} \in \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației date este :

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{2l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Observație. $\cos 4x = \cos 3x \Leftrightarrow 4x = \pm 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, de unde $x \in S$.

3. Scriem ecuația sub forma $\sin 5x - \sin 2x = 0$ și transformăm în produs, obținem : $2 \cos(7x/2) \cdot \sin(3x/2) = 0$, de unde $\cos(7x/2) = 0$, sau $\sin(3x/2) = 0$, astfel că :

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{7} + \frac{4k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{7} + \frac{4k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2l\pi}{3} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Ecuația având coeficienți reali admite și rădăcina $x_2 = 2 + i$, iar polinomul care definește ecuația este divizibil prin $(X - 2 + i)(X - 2 - i) = X^2 - 4X + 5$. Efectuind împărțirea se obține citul $X^2 + 1$ care are rădăcinile $x_3 = i, x_4 = -i$.

Altfel : scriem ecuația sub forma $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 5) + x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0, x^2 + 1 = 0$, de unde $x_{1,2} = 2 \mp i, x_{3,4} = \pm i$.

C. Relația dată se mai scrie :

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Folosind $A + B + C = \pi$, adică $\cos[(A+B)/2] = \cos(\pi/2 - C/2) = \sin(C/2)$, relația se scrie :

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 0.$$

Observînd că $\sin(C/2) \neq 0$, $C \in (0, \pi)$, avem :

$$\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{A-B+C}{2} \cdot \sin \frac{A-B-C}{2} = 0.$$

De aici rezultă $A-B+C=0$, cu $A+B+C=\pi$ sau $A-B-C=0$, cu $A+B+C=\pi$, adică $B=\pi/2$ sau $A=\pi/2$. Prin urmare, existența egalității $\cos A + \cos B = \sin C$ implică triunghiul dreptunghic în A sau B .

Reciproc, este evident.

D. Fie $[ABCD A' B' C' D']$ prisma patrulateră regulată (fig. I.8.D) care are latura bazei egală cu $\sqrt{144} = 12$ cm.

1. Din $\triangle A' B' C'$ — dreptunghic, rezultă $A' C' = 12\sqrt{2}$ cm, iar din $\triangle A' C' C$ — dreptunghic, $A' C = \sqrt{2 \cdot 12^2 + 14^2} = \sqrt{484} = 22$ cm.

2. Prisma fiind dreaptă, secțiunea diagonală este dreptunghiul $AA' C' C$ și $\sigma[AA' C' C] = A' C' \cdot AA' = 168\sqrt{2}$ cm².

3. $\sigma_1(P)$ = perimetrul bazei $\cdot$ muchia = $48 \cdot 14 = 672$ cm² și $\mathcal{V}(P) = \sigma[ABCD] \cdot AA' = 144 \cdot 14 = 2016$ cm³.

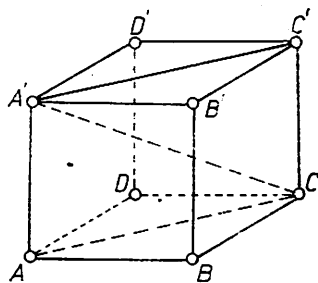


Fig. I.8.D

I.9. A. Expresia $F(x)$ are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă $x^2 + x + m \neq 0$, adică ecuația $x^2 + x + m = 0$ nu admite rădăcini reale. Deci $\Delta_2 = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m \in (1/4, +\infty)$. Coeficienții lui x^2 de la numărător și numitor fiind pozitivi, $F(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă $\Delta_1 = m^2 - 2m - 7 \leq 0$ și $\Delta_2 = 1 - 4m < 0$. Rezolvînd, se obține $m \in (1/4, 1 + 2\sqrt{2}]$.

B. *Metoda 1*. Scriem sistemul sub forma :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx - y = 0 \\ z(xy + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ sau}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx - y = 0 \\ xy = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Sistemul (1) are soluțiile $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$; $x_2 = 1, y_2 = -2, z_2 = 0$. Ecuația a treia din sistemul (2) ne arată că $x \neq 0, y \neq 0$. Avem :

$$\begin{cases} z = -2x - y \\ yz + zx - y = 1 \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{x} \\ 2x^4 - 2x^2 - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuație a sistemului se scrie : $2x^2(x^2 - 1) - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 1) = 0$, de unde $x = 1$ și ecuația $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$. Se verifică că ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină reală $x = a \in (1/3, 2/3)$. Într-adevăr, $f(1/3) = -19/27 < 0$ și $f(2/3) = 13/27 > 0$.

Din $f(x) = 0$ și $f(a) = 0$ obținem $2x^3 + 2x^2 = 2a^3 + 2a^2 \Leftrightarrow (x - a)[x^2 + x(a + 1) + a(a + 1)] = 0$, cu o rădăcină $x = a$ și ecuația $x^2 + x(a + 1) + a(a + 1) = 0$ care pentru $a \in (1/3, 2/3)$ nu admite rădăcini reale ($\Delta = (a + 1)(-3a + 1) < 0$ pentru $a \in (-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$). Prin urmare, ecuația $2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ admite o singură rădăcină reală $x = a \in (1/3, 2/3)$. Sistemul (2) admite deci soluțiile: $x_3 = 1$, $y_3 = -1$, $z_3 = -1$; $x_4 = a \in (1/3, 2/3)$, $y_4 = -1/a$, $z_4 = -2a + 1/a = 2a^2$ (din $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$).

În concluzie, soluțiile sistemului dat sînt:

x	0	1	1	a
y	0	-2	-1	$-1/a$
z	0	0	-1	$2a^2$

unde $a \in (1/3, 2/3)$.

Metoda 2. Folosind formulele lui Viète, forma sistemului ne conduce la ecuația de gradul 3 în t : $t^3 + xt^2 + yt + z = 0$, cu rădăcinile $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$ sau o permutare a acestora. Punind condiția ca x, y, z să verifice ecuația, se obține sistemul:

$$\begin{cases} 2x^3 + xy + z = 0 \\ y^3 + (x + 1)y^2 + z = 0 \\ z^3 + xz^2 + (y + 1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + xy + z = 0 \\ y^3 + (x + 1)y^2 + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3) \text{ sau}$$

$$\begin{cases} 2x^3 + xy + z = 0 \\ y^3 + (x + 1)y^2 + z = 0 \\ z^2 + xz + y + 1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Sistemul (3) conduce la:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y^2(x + y + 1) = 0 \\ x(2x^2 + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z = 0 \\ y = -x - 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

astfel că soluțiile sistemului (3) sînt: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$ (soluția $x = -1/2$, $y = -1/2$, $z = 0$ nu verifică ecuația $x + y + z = -x$).

Scăzînd primele două ecuații din (4), se obține $(x - y)(2x^2 + 2xy + y^2 + y) = 0$. Se observă că $x = y$ nu verifică ecuația $xyz = -z$ cu $z \neq 0$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, din (4) se obține sistemul:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 + y = 0 \\ 2x^3 + xy + z = 0 \\ z^2 + xz + y + 1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Folosind ecuația $xyz = -z$ cu $z \neq 0$, rezultă $xy = -1$ și (5) se scrie:

$$\begin{cases} xy = -1 \\ 2x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \\ 2x^3 + z = 1 \\ z^2 + xz + y + 1 = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2x^4 - 2x^2 - x + 1 = 0 \\ z = 1 - 2x^3 \\ z^2 + xz + y + 1 = 0, \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

cu soluțiile $x = 1, y = -1, z = -1$, și $x = a \in (1/3, 2/3), y = -1/a, z = 1 - 2a^3 = 2a^2$ (din $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$).

Observație. Lăsăm în seama cititorului să arate că ecuația $z^2 + xz + y + 1 = 0 \Leftrightarrow z(x + z) + y + 1 = 0$ este o combinație a ecuațiilor sistemului dat.

C. Vezi I.7.B.2.

D.1. Potrivit datelor problemei, cele patru puncte O, A, B, C sînt vîrfurile unei piramide (fig. I.9.D). Avem: $AB^2 = a^2 + b^2, AC^2 = a^2 + c^2, BC^2 = b^2 + c^2$ și teorema cosinusului pentru triunghiul ABC ne dă:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} > 0;$$

$$\cos B = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} > 0;$$

$$\cos C = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} > 0.$$

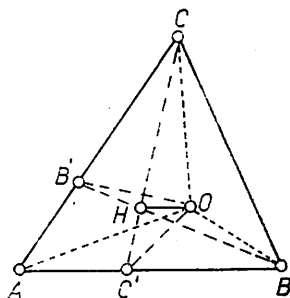


Fig. I.9.D

Rezultă că unghiurile $\triangle ABC$ sînt cuprinse în $(0, \pi/2)$ și triunghiul este ascuțitunghic.

2. Fie H proiecția ortogonală a lui O pe planul (ABC) (fig. I.9.D). Notăm cu C' intersecția prelungirii lui CH cu AB și vom arăta că CO' este înălțime în $\triangle ABC$. Din $CO \perp OA$ și $CO \perp OB$, rezultă $CO \perp (AOB)$, adică $CO \perp AB$, iar din $OH \perp (ABC)$ rezultă $OH \perp AB$. Deci $AB \perp OH$ și $AB \perp OC$, adică $AB \perp (OCC')$ și prin urmare, $AB \perp CC'$, adică CO' este înălțime în $\triangle ABC$.

Analog se arată că și BB' este înălțime pentru $\triangle ABC$ și deci H este ortocentrul $\triangle ABC$.

Lungimea segmentului $[OH]$ rezultă simplu calculînd în două moduri volumul piramidei: $\mathfrak{V}([OABC]) = OC \cdot \sigma[AOB]/3 = OH \cdot \sigma[ABC]/3$. Se obține $OH = abc/2\sigma[ABC]$, unde $\sigma[ABC] = \sqrt{p(p - \sqrt{a^2 + b^2})(p - \sqrt{a^2 + c^2})(p - \sqrt{b^2 + c^2})}$, p fiind semiperimetrul $\triangle ABC$.

Alt mod: din triunghiul dreptunghic COC' avem $OH = CO \cdot C'O : CC'$, unde $CO = c, C'O = ab/AB, CC' = 2\sigma[ABC]/AB$.

I.10. A.1. Se impun următoarele condiții de existență: $x > 0, 5x - 4 > 0$ și $\lg(5x - 4) \neq 0$ sau $5x - 4 \neq 1$, adică $D = (4/5, 1) \cup (1, +\infty)$. Ecuația se scrie: $2 \lg x = \lg(5x - 4)$, cu $x \in D$, sau $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 4 \in D, x_2 = 1 \notin D$.

2. Folosind $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ecuația se scrie sub forma :

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3}/2 \text{ sau } \cos 2x = \sqrt{3}/2, \text{ de unde}$$

$$x \in \{\pi/12 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/12 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Ecuația se scrie : $(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = 1/4$, sau $(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = 1/4$. Folosind $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, obținem $1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1/4$ care ne conduce la $\sin^2 2x = 1$, de unde $\sin 2x = 1$, sau $\sin 2x = -1$ și deci

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^{l+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Ecuațiile sistemului sînt simetrice în necunoscutele x și y . Introducem necunoscutele auxiliare $s = x + y$ și $p = xy$:

$$\begin{cases} 3s^2 - 7p = 5 \\ s^2 - 7p = -3 \end{cases} \Rightarrow s^2 = 4, p = 1.$$

Se obțin deci sistemele :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ cu soluția } x = y = 1 \text{ și } \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ cu soluția } x = y = -1.$$

Prin urmare, soluțiile sistemului dat sînt $(1, 1)$ și $(-1, -1)$.

Observație. Ecuațiile sistemului fiind simetrice și omogene în necunoscutele x și y , se poate face substituția $y = tx$. Se obține :

$$\begin{cases} x^2(3 - t + 3t^2) = 5 \\ x^2(1 - 5t + t^2) = -3 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0, t_{1,2} = 1$$

și deci $x^2 = 1$, $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = -1$.

C. Fie $A'B'C'$ triunghiul determinat de bisectoarele unghiurilor

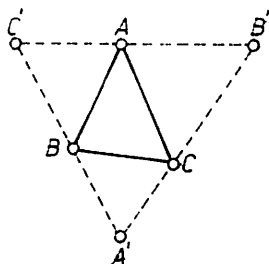


Fig. I.10.C

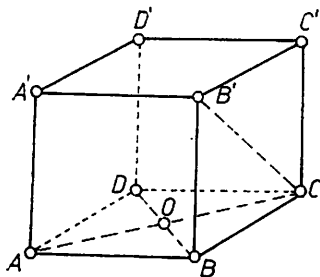


Fig. I.10.D

exterioare ale triunghiului $\triangle ABC$ (fig. I.10.C). Conform teoremei unghiului

exterior, putem scrie : $m(\widehat{ABC'}) = m(\widehat{A'BC}) = (m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}))/2 = 55^\circ$, $m(\widehat{A'CB}) = m(\widehat{ACB'}) = (m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))/2 = 60^\circ$, $m(\widehat{CAB'}) = m(\widehat{BAC'}) = (m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}))/2 = 65^\circ$. Din $\triangle BA'C$ rezultă $m(\widehat{A'}) = 180^\circ - (55^\circ + 60^\circ) = 65^\circ$. În mod analog, se obține : $m(\widehat{B'}) = 55^\circ$, $m(\widehat{C'}) = 60^\circ$.

D. Paralelipipedul $[ABCD A'B'C'D']$ fiind drept, cu bazele romburi, (fig. I.10.D), fețele laterale sînt dreptunghiuri congruente. Din triunghiul

dreptunghic BOC rezultă $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, iar din triunghiul dreptunghic $B'BC$ se obține $BB' = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Deci $\sigma_i(P) = 2\sigma[ABCD] + 4\sigma[ABB'A] = 2 \cdot (AC \cdot BD)/2 + 4 \cdot AB \cdot BB' = 288 \text{ cm}^2$.

I.11. A.1. Notînd $3^x = t$, ecuația devine $t^2 - t - 6 = 0$, de unde $t_1 = 3 > 0$, iar $t_2 = -2 < 0$ nu convine. Deci $3^x = 3$, adică $x = 1$.

2. Notînd $x^2 = y$, ecuația se scrie $y^2 + 5y - 6 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = 1, y_2 = -6$. Deci $x^2 = 1$, adică $x_{1,2} = \pm 1$, iar $x^2 = -6$ nu are loc în $\mathbb{R}$.

B. Ecuația dată avînd coeficienți numere reale și admițînd rădăcina $x_1 = 1 + i$, va admite și rădăcina $x_2 = 1 - i$. Prin urmare polinomul care definește ecuația este divizibil prin $(X - 1 - i)(X - 1 + i) = X^2 - 2X + 2$. Efectuînd împărțirea se obține citul $X^2 + X + m$ și restul $r(X) = 2mX + n - 2m$. Polinoamele fiind divizibile, restul $r(X)$ trebuie să fie polinomul nul, adică $2m = 0$ și $n - 2m = 0$, de unde $m = 0, n = 0$.

Pentru $m = 0, n = 0$, ecuația dată este $x^4 - x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + x) = 0$ (s-a folosit rezultatul împărțirii efectuate). Se obțin rădăcinile: $x_{1,2} = 1 \pm i, x_3 = 0, x_4 = -1$.

C.1. Se procedează ca la problema I.10.B, obținînd sistemele:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

cu soluțiile $(1, 2), (2, 1); (-1, -2), (-2, -1)$.

2. Se impun condițiile $x > 0, y > 0$ și sistemul se scrie:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ \lg(xy) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ xy = 10. \end{cases}$$

În continuare se procedează ca la problema I.10.B și deoarece $x > 0, y > 0$, rezultă sistemul $x + y = 7, xy = 10$, cu soluțiile $(5, 2), (2, 5)$.

D. Transformînd în produs se obține:

$$2 \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}.$$

Din $A + B + C = \pi$ avem

$$\cos \frac{B+C}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \neq 0,$$

$$\sin \frac{B+C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} \neq 0,$$

oricare ar fi $A \in (0, \pi)$ și $\cos [(B-C)/2] \neq 0$ deoarece $(B-C)/2 \neq \pi/2$. Înlocuind, se verifică egalitatea dată, oricare ar fi triunghiul ABC .

E. Fie CD înălțimea triunghiului echilateral ABC de latură a (fig. I.11.E); avem $CD = a\sqrt{3}/2$ u.l.

Deoarece $C'C \perp (ABC)$ și $CD \perp AB$, potrivit teoremei celor trei perpendiculare, rezultă $MD \perp AB$ și

$\triangle MDC$ este dreptunghic isoscel: $m(\widehat{MDC}) = 45^\circ$.

Prin urmare $MC = CD = a\sqrt{3}/2$ u.l. și înălțimea prismei este $CC' = a\sqrt{3}$ u.l. În continuare se obține $\sigma_i(P) = \sigma_i(P) + 2\sigma[ACDB]$,

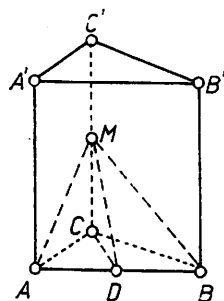


Fig. I.11.E

adică

$$\sigma_i(P) = 3a \cdot a\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}$$

I.12. A. Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți, inecuația se scrie :

$$\left| \frac{-2(m+2)}{2} + 3 \cdot \frac{m^2 + 4m + 3}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{3m^2 + 10m + 5}{2} < 1.$$

De aici rezultă sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} 3m^2 + 10m + 3 < 0 \\ 3m^2 + 10m + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in (-3, -1/3) \cap [(-\infty, -7/3) \cup (-1, +\infty)],$$

de unde $m \in (-3, -7/3) \cup (-1, -1/3)$.

B. Deoarece $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$, în conformitate cu enunțul scriem : $2^{n-1} = 128$, de unde $n = 8$.

Termenul de rang $k + 1$ se scrie :

$$T_{k+1} = C_8^k (a/\sqrt{a})^{8-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k = C_8^k \cdot a^{\frac{5(8-k)}{4} - \frac{k}{2}}.$$

$$\text{Trebuie să avem } \frac{5(8-k)}{4} - \frac{k}{2} = 3, \text{ de unde } k = 4 \text{ și } T_5 =$$

$$= \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot a^3 = 70 a^3.$$

C. Notăm $z^4 = t$ și ecuația se scrie $t^2 - 2t + 2 = 0$, cu rădăcinile :

$$t_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad t_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

Soluțiile ecuației date sînt :

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ și}$$

$$z'_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

D. Din enunț rezultă $PQ \parallel DC \parallel AB$ (fig. I.12.D), astfel că $XN \perp PQ$. Fie F punctul de intersecție al dreptelor PM și QN . Vom demonstra că $PF \perp QN$. Deoarece diagonalele unui dreptunghi se înjumătățesc, rezultă că $\triangle XEQ$ este isoscel; la fel $\triangle XKP$ este isoscel. Deci $m(\widehat{EQX}) = m(\widehat{EXQ})$ și $m(\widehat{PXX}) = m(\widehat{XPK})$ (1). Dar AC este diametru și $m(\widehat{AXC}) = 90^\circ$, astfel că $m(\widehat{EXQ}) + m(\widehat{PXX}) = 90^\circ$, sau folosind (1), $m(\widehat{EQX}) + m(\widehat{XPK}) = 90^\circ$, iar din $\triangle QPF$ rezultă $m(\widehat{QFP}) = 90^\circ$, adică $PF \perp QN$ și M este ortocentrul triunghiului PNQ .

E. Fie $[VABCD]$ piramida patrulateră regulată cu $AB = a$, $VO = b$ (fig. I.12.E) și $[MNPQM'N'P'Q']$ cubul înscris în piramidă. Notăm cu x lungimea muchiei cubului; atunci $MO = x\sqrt{2}/2$. Din asemănarea triunghiurilor AVO și AMM' rezultă

$$\frac{VO}{M'M} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} \right)$$

de unde se obține $x = ab/(a + b)$.

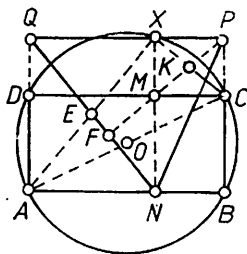


Fig. I.12.D

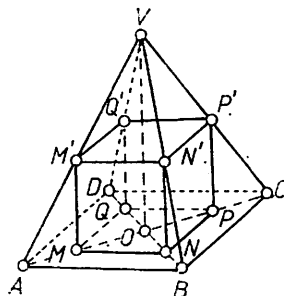


Fig. I.12.E

I.13. A.1. Conform injectivității funcției exponențiale, ecuația devine $x^2 - 5x = -4$, de unde se obțin rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

2. Ecuația se scrie succesiv astfel: $2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - \cos x) = 0$, de unde $\cos x = 0$ cu soluțiile:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

și

$$2 \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = 2,$$

cu soluțiile

$$x \in \{\arctan 2 + l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\arctan 2 + l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

B. Reducând pe y se obține ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Soluțiile sistemului în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sînt: $(-1, 6)$, $(2, 0)$.

C. Conform teoremei lui Bézout, restul împărțirii lui h la k este $h(-1) = 0$; se obține $1 + m - 2 + 6 - 1 = 0$ sau $m = -4$.

D. Printr-o rotație de 360° a unei suprafețe triunghiulare dreptunghice în jurul suportului unei catete se obține un con circular drept (fig. I.13.D). Din triunghiul dreptunghic ABC se obține $BC = 10$ cm. Deci

$$V(C) = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi \text{ cm}^3 \text{ și } \sigma_l(C) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi \text{ cm}^2.$$

I.14. A.1. Înmulțind ecuația a doua cu 2, sistemul se scrie: $x + 2y = 7$, $x(2y) = 6$, care conduce la ecuația de gradul doi: $z^2 - 7z + 6 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = x = 6$, $z_2 = 2y = 1$ sau $z_2 = x = 1$, $z_1 = 2y = 6$. Deci soluțiile sistemului sînt $(6, 1/2)$ și $(1, 3)$.

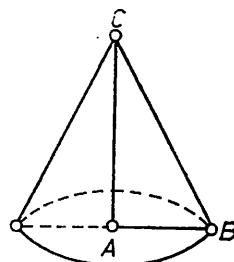


Fig. I.13.D

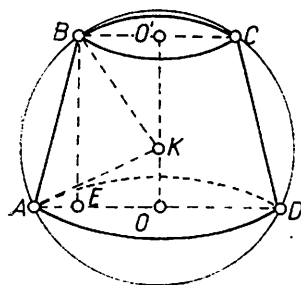


Fig. I.14. D

2. Ecuația se scrie : $3^{3-x} = 3^4$, de unde, datorită injectivității funcției exponențiale, $3 - x = 4$, adică $x = -1$.

3. Ecuația se scrie : $5(x^3 + 1) + 31x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(5x^2 + 26x + 5) = 0$. Rezolvând se obțin rădăcinile : $x_1 = -1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1/5$.

4. Ecuația se împarte prin $\cos x \neq 0$ și se obține $\tan x = 1$, de unde

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Folosim $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$. Din $\sin x = 1/2$, $\sin y = 1/3$, cu $x, y \in (0, \pi/2)$, rezultă $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{3}/2$ și $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = 2\sqrt{2}/3$, astfel că $\sin(x + y) = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})/6$.

C. Lungimea înălțimii AA' se calculează cu formula $AA' = 2\sigma[ABC]/BC$, unde $\sigma[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, cu p semi-perimetrul ($p = 8$ cm). Se obține $AA' = 8\sqrt{6}/7$ cm.

D.1. Din triunghiul dreptunghic ABE (fig. I.14.D) se determină înălțimea BE (sau OO') a trunchiului de con : $BE = 12$ cm și $\mathcal{V}(T) = (12\pi/3) \cdot (7^2 + 2^2 + 7 \cdot 2) = 268\pi$ cm³.

$$2. \sigma_1(T) = \pi \cdot 13 \cdot (7 + 2) + \pi \cdot 7^2 + \pi \cdot 2^2 = 170\pi$$
 cm².

3. Fie $K \in OO'$ centrul sferei circumscrise trunchiului de con ; avem : $AK = BK$. Din triunghiurile dreptunghice AOK și $BO'K$ se determină raza sferei astfel : $R^2 = 7^2 + KO^2$; $R^2 = 2^2 + (12 - KO)^2$, de unde $KO = 33/8$ și $R = 65/8$ cm. Prin urmare $\mathcal{V}(S) = 4\pi \cdot (65/8)^3/3 = 274625\pi/384$ cm³.

I.15. A. Se presupune că are loc egalitatea și se arată că $a = 14$ sau $a = -14$. Într-adevăr, prin ridicare la cub, folosind formula : $(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$, se obține : $20 + a\sqrt{2} + 3\sqrt{400 - 2a^2} \cdot 4 + 20 - a\sqrt{2} = 64 \Leftrightarrow \sqrt{400 - 2a^2} = 2 \Leftrightarrow 400 - 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 196$, de unde $a = 14$ sau $a = -14$.

Reciproc, în ipoteza $a = 14$ sau $a = -14$, să arătăm că

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Fie $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = t$; prin ridicare la cub se obține ecuația de gradul trei în t : $t^3 - 6t - 40 = 0$, care are singura rădăcină reală $t = 4$ ($t^3 - 6t - 40 = (t - 4)(t^2 + 4t + 10)$).

B. Se impun următoarele condiții de existență a logaritmulor : $x > 0$, $2x \neq 1$ și $4x \neq 1$. Deci $x \in (0, 1/4) \cup (1/4, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ și ecuația se scrie succesiv :

$$\log_{2x}(2 \cdot 2x) + \log_{4x}(4 \cdot 4x) = 4 \Leftrightarrow \log_{2x} 2 + 1 + \log_{4x} 4 + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 2x} + \frac{2}{\log_2 4x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = 2.$$

Notind $\log_2 x = t$ și efectuând calculele, se obține ecuația de gradul doi în t , cu $t \neq -1$, $t \neq -2$: $2t^2 + 3t = 0$, de unde $t_1 = 0$, $t_2 = -3/2$. Ecuația $\log_2 x = 0$ are soluția $x = 1$, iar ecuația $\log_2 x = -3/2$ are soluția $x = 2^{-3/2}$; acestea sînt și soluțiile ecuației date.

C. Înlocuind $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ecuația se scrie succesiv :

$$m \sin^4 x + 1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x + 1 - \sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m+1) \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \text{ sau } \sin^2 x = \frac{3}{m+1} \in [0,1].$$

Din $\sin^2 x = 0$ rezultă că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ ecuația dată admite mulțimea de soluții $S_1 = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Pentru $m \in [2, +\infty)$, care se obține din $0 \leq \frac{3}{m+1} \leq 1$, la mulțimea de soluții S_1 se adaugă mulțimea :

$$S_2 = \left\{ (-1)^l \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{m+1}} + l\pi | l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ \cup \left\{ (-1)^{l+1} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{m+1}} + l\pi | l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D. În $\triangle ABC$ (fig. I.15.D) fie A', B', C' mijloacele laturilor, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor, H ortocentrul și A_2, B_2, C_2 mijloacele segmentelor $[AH], [BH], [CH]$. Vom arăta că cele nouă puncte se află pe un același cerc, numit cercul lui Euler.

În $\triangle AHC$, A_2C_2 este linie mijlocie, adică $A_2C_2 \parallel AC$; la fel, în $\triangle BOH$, $A'C_2$ linie mijlocie, adică $A'C_2 \parallel BB_1$. Dar $BB_1 \perp AC$; rezultă $A'C_2 \perp A_2C_2$. La fel se arată că $A_2C' \perp C'A'$ și cum $A_2C_2 \parallel C'A'$ și $A_2C' \parallel A'C_2$, rezultă că $A_2C_2A'C'$ este un dreptunghi și punctele A_2, C_2, A', C' se află pe cercul de diametru C_2A' , sau A_2A' .

În mod cu totul analog se arată că $B_2C_2B'C'$ este dreptunghi și punctele B_2, C_2, B', C' se află pe cercul de diametru C_2B' , astfel că punctele $A_2, B_2, C_2, A', B', C'$ sînt conclice.

Deoarece punctul A_1 aparține cercului de diametru A_2A' , B_1 aparține cercului de diametru B_2B' care coincide cu cercul de diametru C_2C' și C_1 aparține cercului de diametru C_2C' , care coincide cu cercul de diametru A_2A' , rezultă că cele nouă puncte se află pe cercul lui Euler.

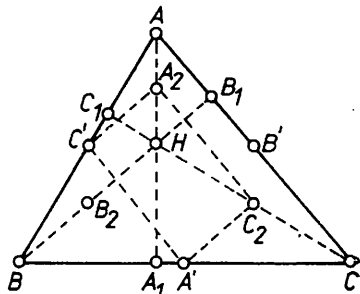


Fig. I.15. D

E.1. Fie SO înălțimea piramidei $[SABC]$ (fig. I.15.E). Din $\triangle SOC \equiv \triangle SOA \equiv \triangle SOB$ (ca triunghiuri dreptunghice cu ipotenuzele congruente și SO catetă comună), rezultă că O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, cu raza $R = CO$. Dar $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4\sigma[\triangle ABC]}$. Din $\triangle ABC$ rezultă $AD = \frac{2\sigma[\triangle ABC]}{BC} = 9$ cm și aplicînd teorema lui Pitagora în $\triangle ADB$ se obține $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 3\sqrt{10}$ cm. Prin urmare $R = 5$ cm și din $\triangle dr. SOC$ rezultă $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{SC^2 - R^2} = 12$ cm.

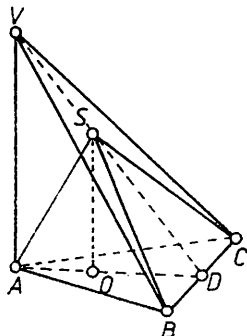


Fig. I.15. E

2. Din aplicarea teoremei celor trei perpendiculare se obține $SD \perp BC$ și $VD \perp BC$, adică punctele V, S, D sînt coliniare. Triunghiurile VAD și SOD sînt asemenea și $AV/SO = AD/OD$, de unde $AV = 27$ cm și atunci $VD = 9\sqrt{10}$ cm.

Rezultă

$$\sigma_i([VABC]) = \frac{AB \cdot AV}{2} + \frac{AC \cdot AV}{2} + \frac{BC \cdot VD}{2} +$$

$$\oplus \sigma[ABC] = 27(1 + 4\sqrt{10}) \text{ cm}^2 \text{ și } \mathfrak{V}([VABC]) = \frac{AV}{3} \cdot \sigma[ABC] = 243 \text{ cm}^3.$$

I.16. A.1. Mulțimea în care se rezolvă ecuația este determinată de inegalitățile $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ și $x - 2 \geq 0$. Trinomul $X^2 - 2X + 2$ are discriminantul $\Delta' = -1 < 0$ și deci este pozitiv pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Inecuația $x - 3 \geq 0$ conduce la $x \in [2, +\infty)$. Pentru $x \in [2, +\infty)$ ecuația se scrie: $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 4$ cu soluția $x = 1 \notin [2, +\infty)$, adică ecuația nu admite soluții în $\mathbb{R}$.

2. Ecuația are sens pentru $x > 0$ și $5x - 4 > 0$, adică pentru $x \in (4/5, +\infty)$. Folosind proprietățile logaritmilor, ecuația se scrie: $x^2 = 5x - 4$ sau $x^2 - 5x + 4 = 0$, de unde $x_1 = 1 \in (4/5, +\infty)$, $x_2 = 4 \in (4/5, +\infty)$, adică ea admite două rădăcini: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

3. Notînd $3^x = t > 0$, ecuația devine: $t^2 - t - 6 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 3 > 0$ și $t_2 = -2 < 0$, care nu convine. Din $3^x = 3$, rezultă $x = 1$ soluția ecuației.

4. Deoarece $1 = \text{tg}(\pi/4)$, ecuația se scrie $\sin x - \text{tg}(\pi/4) \cdot \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos(\pi/4) - \cos x \cdot \sin(\pi/4) = \sqrt{2} \cdot \cos(\pi/4) \Leftrightarrow \sin(x - \pi/4) = 1$, de unde

$$x - \pi/4 \in \text{Arc sin } 1, \text{ adică}$$

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Deoarece $x \in (\pi/2, \pi)$, $\cos x < 0$, astfel că $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$, adică $\cos x = -\sqrt{3}/2$. În continuare scriem

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1/2, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = -\sqrt{3}/2.$$

Observație. Ecuația $\sin x = 1/2$ cu $x \in (\pi/2, \pi)$ are soluția $x = 5\pi/6$.

$$\text{Avem: } \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin 2 \cdot \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C. Deoarece afix $z = A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \text{Cadr I}$, rezultă că $\arg z = \arctg\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \frac{\pi}{6}$ și deoarece $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$, se obține următoarea formă trigonometrică pentru numărul complex z :

$$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

D.1. Din $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ și $x_1 + x_2 = 1$ se obține $x_3 = 1$. Înlocuind $x = 1$ în ecuație, rezultă $m = 9$.

$$2. \text{ Relația } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 7 \text{ se mai scrie } \frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = 7.$$

Folosind formulele lui Viète se obține $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = -7/2$, $x_1 x_2 x_3 = -m/2$, de unde rezultă că egalitatea

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 7$$

are loc pentru $m = 1$.

E.1. Se folosesc formulele: $\sigma_1(P) = P \cdot a/2$, $\varphi(P) = B \cdot i/3$. Potrivit figurii I.16.E, din triunghiul dreptunghic VOE se obține $VE = 13$ cm și atunci $\sigma_1(P) = 260$ cm² și $\varphi(P) = 400$ cm³.

2. Fie $O_1 \in VO$ centru sferei circumscrise piramidei $[VABCD]$. Din $AO_1 = DO_1 = CO_1 = BO_1$, reiese că O_1 este și centrul cercului circumscris triunghiului VAC . Prin urmare $B = AV \cdot AC \cdot CV/4$, $\sigma[VAC] = AV^2/2VO$, cu $2\sigma[VAC] = AC \cdot VO$ și $AV \equiv CV$. Înlocuind $AV = \sqrt{AO^2 + VO^2} = \sqrt{AB^2/2 + VO^2} = \sqrt{194}$ cm, se obține $R = 97/12$ cm.

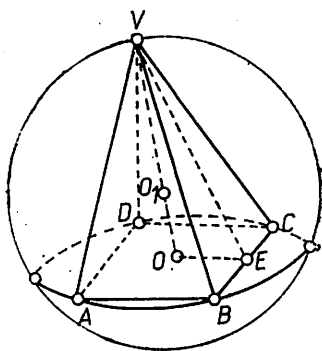


Fig. I.16.E

1.17. A.1. Ecuația se scrie $5^{x^2-x-2} = 5^4$, de unde, potrivit injectivității funcției exponențiale, $x^2 - x - 2 = 4$ cu $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ care sînt soluțiile ecuației.

2. Folosind semnul funcției de gradul doi pentru inecuație se obține: $x \in (-\infty, 1/2] \cup [1, +\infty)$.

3. Rezultă $4x \in \text{Arc cos } (-1/2)$, de unde

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Ecuația se scrie: $x^3 + 1 + x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0$ cu rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$.

C. Folosind formula $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$, expresia se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} E &= (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 2 \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = \\ &= 2 \sin 3x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 3x \cdot \left(\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin 3x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

D. Scriind formulele lui Viète pentru ecuația $f(x) = 0$, se reține $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ și folosind ipoteza $x_1 + x_2 = x_3$, rezultă $x_3 = 5$. Celelalte rădăcini se determină aplicînd schema lui Horner:

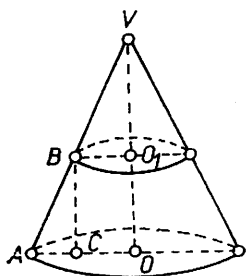


Fig. I.17.E

x^3	x^2	x	x^0	r	
1	-10	29	-20		5
		1	-5	4	0

Rezultă ecuația $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, astfel că rădăcinile polinomului dat sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

E. Fie $r = BO_1$ raza cercului de secțiune, avînd aria 4π cm² (fig. I. 17. E), avem $r = 2$ cm.

Din asemănarea triunghiurilor ABC și AVO ($BC \parallel VO$) se poate scrie: $BC/VO = AC/AO$, de unde $BC = 7,2$ cm, iar din Δ dr. ABC rezultă $AB = 7,8$ cm. Deci $\sigma_1(T) = \pi g(R+r) = 54,6 \pi \text{ cm}^2$ și $\varphi(T) = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) = 93,6 \pi \text{ cm}^3$.

F. Primul membru se scrie succesiv astfel :

$$1 + \cos A \cdot \cos(B - C) = 1 + (1/2) \cdot [\cos(A + B - C) + \cos(A - B + C)] = \\ = 1 - (1/2) \cdot (\cos 2C + \cos 2B) = \sin^2 C + \sin^2 B \text{ (s-a folosit } A + B + C = \pi).$$

Înlocuind $\sin B = b/2R$, $\sin C = c/2R$ se obține relația din enunț.

1.18. A. Condiții de existență: $1 + ax \geq 0$ (1), $1 - ax \geq 0$ (2) și $x + \sqrt{1 - ax} \geq 0$ (3). Condițiile (1) și (2) pot fi scrise sub forma: $|ax| \leq 1$ (4). Ridicând ecuația la pătrat se obține $x(x - 2a + 2\sqrt{1 - ax}) = 0$, de unde $x_1 = 0$ și $2\sqrt{1 - ax} = 2a - x$ (5). Cu condiția $2a - x \geq 0$ (6), ecuația (5) poate fi ridicată la pătrat: $x^2 - 4(1 - a^2) = 0$, de unde $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{1 - a^2} \in \mathbb{R}$, $\forall a \in (-1, 1)$ (pentru $a = \pm 1$, $x_{2,3} = x_1 = 0$). Înlocuind $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{1 - a^2}$ în (4) și ridicând la pătrat se observă că (4) are loc pentru orice $a \in (-1, 1)$. Din (5) se obține $x + \sqrt{1 - ax} = a + x/2$, astfel încât (3) devine $a + x/2 \geq 0$ (3'). Condițiile (3') și (6) conduc la $a \geq 0$.

Pentru $x_2 = 2\sqrt{1 - a^2}$ și $a \geq 0$ condiția (3') este satisfăcută, iar din (6), cu valoarea lui x_2 , prin ridicare la pătrat, se obține $2a^2 - 1 \geq 0$, adică $a \in \left\{ \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right) \right\} \cap (0, 1) \Rightarrow a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$.

Prin urmare, $x_2 = 2\sqrt{1 - a^2}$ este soluție a ecuației date pentru $a \in [\sqrt{2}/2, 1)$.

Pentru $x_3 = -2\sqrt{1 - a^2}$ și $a \geq 0$, condiția (6) este satisfăcută, iar din (3'), cu valoarea lui x_3 prin ridicare la pătrat, se obține $2a^2 - 1 \geq 0$, adică

$$a \in \left\{ \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right) \right\} \cap (0, 1) \Rightarrow a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right).$$

În concluzie, pentru $a \in [\sqrt{2}/2, 1]$ ecuația admite rădăcinile $x_2 = 2\sqrt{1 - a^2} \neq 0$, $x_3 = -2\sqrt{1 - a^2} \neq 0$, iar $x_1 = 0$ este rădăcină a ecuației pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Altfel, în ipoteza $|ax| \leq 1$, cu notațiile $\sqrt{1 + ax} = u \geq 0$, $\sqrt{1 - ax} = v \geq 0$, ecuația devine $u - v = x$. Dar $1 + ax = u^2$, $1 - ax = v^2$, de unde $u^2 + v^2 = 2$ și $2ax = u^2 - v^2$. De aici, folosind $u - v = x$, rezultă ecuația $2ax - x(u + v) = 0$ cu $x_1 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ și sistemul

$$\begin{cases} u + v = 2a \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2a \\ uv = 2a^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 2at + 2a^2 - 1 = 0,$$

$$t_{1,2} = a \pm \sqrt{1 - a^2}.$$

Deoarece $u \geq 0$, $v \geq 0$, ecuația de gradul doi în t trebuie să admită ambele rădăcini reale, pozitive, adică $\Delta > 0$, $P \geq 0$, $S > 0$ sau $1 - a^2 > 0$, $2a^2 - 1 \geq 0$, $a > 0$, de unde $a \in [\sqrt{2}/2, 1)$.

Din $\sqrt{1+ax} = u$ și $u = t_1 = a + \sqrt{1-a^2}$, se obține $1+ax = a^2 + 2a\sqrt{1-a^2} + 1 - a^2$, de unde $x = 2\sqrt{1-a^2}$. Analog, din $\sqrt{1+ax} = u$ și $u = t_2 = a - \sqrt{1-a^2}$, rezultă $x = -2\sqrt{1-a^2}$.

În concluzie, pentru $a \in [\sqrt{2}/2, 1)$, $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{1-a^2}$.

B. Ecuația fiind reciprocă de grad 4 se rezolvă prin împărțire la x^2 ($x = 0$ nu este soluție a ecuației pentru nici o valoare a lui $a \in \mathbb{R}$): $x^2 + 1/x^2 - a(x + 1/x) = 0$, care, cu notația $y = x + 1/x$, se scrie $y^2 - ay - 2 = 0$, de unde $y_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 + 8})/2 \in \mathbb{R}$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ în plus

$$|y_k| = \left| \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2} \right| \leq \frac{|a|}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2},$$

adică $|y_k| \leq 2$, $k = 1, 2$, pentru $|a| \leq 1$.

1. În cazul $|a| = 1$, adică $a = \pm 1$, avem $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, $y_3 = -2$, $y_4 = 1$ care conduc la ecuațiile $x + 1/x = 2$, $x + 1/x = -1$, $x + 1/x = -2$, $x + 1/x = 1$, cu rădăcinile:

$$x_{1,2} = 1, x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{pentru } a = 1)$$

și

$$x'_{1,2} = -1, x'_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{pentru } a = -1).$$

Acste rădăcini sînt rădăcinile ecuației date pentru $a = 1$; în plus ele au modulul egal cu 1.

2. Pentru $|a| < 1$, $|y_k| < 2$, $k = 1, 2$ și $x + 1/x = y_k \Leftrightarrow x^2 - y_k x + 1 = 0$, de unde

$$x_j = \frac{y_k \pm i\sqrt{4 - y_k^2}}{2}, j = \overline{1, 4} \quad (\text{deoarece } y_k^2 - 4 < 0)$$

și

$$|x_j| = \sqrt{\left(\frac{y_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4 - y_k^2}}{2}\right)^2} = 1, \forall j = \overline{1, 4}.$$

Observație. Lăsăm pe seama cititorului să rezolve ecuația folosind notația $y_k = 2 \cos b_k$.

C. Se presupune $r_1 \leq r_2$ (fig. I.18.C). Fie O_3 mijlocul segmentului $[CD]$, A mijlocul segmentului $[O_1 O_2]$ și B proiecția lui O_3 pe $O_1 O_2$. Cercul de centru O_3 și rază $r'_3 = O_3 B$ va fi tangent în B dreptei $O_1 O_2$. Deci cercul de diametru $[CD]$ va intersecta dreapta $O_1 O_2$ dacă și numai dacă $r_3 = CD/2 > r'_3 = O_3 B$. Fie E proiecția lui O_1 pe DO_2 . Atunci $\sphericalangle EO_1 O_2 \equiv \sphericalangle AO_3 B$ ca unghiuri cu laturi perpendiculare și $\triangle EO_1 O_2 \sim \triangle AO_3 B$. De aici rezultă

$$O_3 B / O_1 E = O_3 A / O_1 O_2 \Leftrightarrow r'_3 = \frac{r_1 + r_2}{O_1 O_2} \cdot \frac{OD}{2},$$

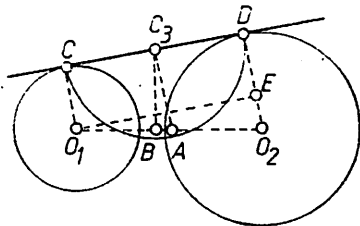


Fig. I. 18.C

unde s-a înlocuit $O_1E = OD$ și $O_3A = (r_1 + r_2)/2$ (O_3A este linie mijlocie în trapezul ODO_2O_1). Prin urmare $r'_3 < OD/2$ dacă și numai dacă $(r_1 + r_2)/O_1O_2 < 1$, adică $r_1 + r_2 < O_1O_2$, ceea ce ne spune că cercurile sînt exterioare.

D.1. Fie O_1 centrul sferei, O centrul pătratului $ABOD$ (care este baza piramidei), E mijlocul laturii BO și V vârful piramidei (fig. I.16.E). Potrivit teoremei celor trei perpendiculare, $VE \perp BO$. Se notează $x = AB$ și $y = VO$; atunci din $\triangle dr.$ VBE rezultă $VE = x/2 \operatorname{tg}(p/2)$ (se presupune

$m(\widehat{BVO}) = p$), iar din $\triangle dr.$ VOE rezultă $y^2 = VE^2 - OE^2 = (x^2/4) \cdot (\cos p)/\sin^2(p/2)$, de unde $y = x\sqrt{\cos p/2} \sin(p/2)$ (1). Dar $O_1O = y - R$ și $AO = x/\sqrt{2}$, astfel că $\triangle dr.$ AOO_1 conduce la $(y - R)^2 + 2x^2/4 = R^2 \Leftrightarrow y^2 - 2Ry + x^2/2 = 0$, sau înlocuind pe y din (1), și deoarece $x \neq 0$, se obține $x = 4R \sin(p/2)/\cos p$ și $y = 2R \cos p$. Deci $\varphi([VABOD]) = (32/3) \cdot R^3 \cdot \sin^2(p/2) \cdot \cos^2 p$.

2. În ipoteza $y = R$ rezultă $2R \cos p = R$, de unde $\cos p = 1/2$, adică $p = \pi/3$ ($m(\widehat{AVB}) < \pi$).

E. Egalitatea din enunț se scrie :

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2 \cdot \frac{\cos C}{\sin C}. \quad (1)$$

Dar $1/\sin A = 2R/a$, $1/\sin B = 2R/b$ etc. (sau $\sigma[ABC] = (bc \sin A)/2$ etc.) și $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$, $\cos B = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$ etc., care înlocuite în (1) conduc la egalitatea dată.

I.19. A. Cu notația $5^x = t > 0$, ecuația devine $t^2 - t - 600 = 0$, de unde $t_1 = 25$, iar soluția $t_2 = -24 < 0$ nu convine. Din $5^x = 25$ se obține $x = 2$.

B. Din sistem rezultă $x > 0$, $y > 0$ și ținînd seama de proprietățile logaritmilor, sistemul se scrie :

$$\begin{cases} x = 90 + y \\ \lg(xy) = 3 \end{cases} \Rightarrow (90 + y) \cdot y = 1000 \Leftrightarrow y^2 + 90y - 1000 = 0,$$

de unde $y_1 = 10$ ($y_2 = -100 < 0$ nu convine). Pentru $y = 10$ se obține $x = 100$ astfel că soluția sistemului este $(100, 10) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C. Ordonînd după i egalitatea se scrie : $(3x + 2y) - (x - 3y)i = 3 - i$. Potrivit definiției egalității a două numere complexe, se obține sistemul :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3y \\ 3 + 9y + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = 1.$$

D. Folosind teorema cosinusului avem $\cos B = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$, $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$ și primul membru se scrie :
 $b \cdot \cos C - c \cdot \cos B = (a^2 + b^2 - c^2)/2a - (a^2 + c^2 - b^2)/2a = (b^2 - c^2)/a$.

E. Pentru a calcula aria laterală și volumul trunchiului de con este necesar să cunoaștem $g = AA'$ și $r = A'O'$ (fig. I.7.D). Din asemănarea tringhiurilor $VA'O'$ și VAO rezultă

$$VO'/VO = r/R = VA'/VA. \quad (1)$$

Dar $VO' = VO - OO' = 4$ cm și $VA = \sqrt{VO'^2 + AO'^2} = 6\sqrt{5}$ cm. Din (1) se obține $r = 2$ cm, $VA' = 2\sqrt{5}$ cm și atunci $g = 4\sqrt{5}$ cm. Rezultă :

$$\sigma_i(T) = \pi(R + r)g = 32(\sqrt{5}) \cdot \pi \text{ cm}^2 \text{ și } \mathfrak{V}(T) = (\pi h/3) \cdot (R^2 + Rr + r^2) = 416 \cdot \pi/3 \text{ cm}^3.$$

F. Fie $[ABODA'B'O'D']$ trunchiul de piramidă (fig. I.19.F). Trunchiul fiind regulat, avem :

$$\sigma_i(T) = (P_1 + P_2) \cdot EE'/2 \text{ și } \mathfrak{V}(T) = (OO'/3) \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2),$$

unde $P_1 = 4 \cdot AB = 12a$ u.l., $P_2 = 4 \cdot A'B' = 4a$ u.l. și $S_1 = 9a^2$ u.a., $S_2 = a^2$ u.a. Din trapezul dreptunghic $AOO'A'$ se determină OO' , iar din trapezul dreptunghic $EOO'E'$ se determină EE' . Se obține $OO' = A'M = a\sqrt{2}$ și $EE' = a\sqrt{3}$. Prin urmare :

$$\sigma_i(T) = 8a^2\sqrt{3} \text{ și } \mathfrak{V}(T) = 13a^3\sqrt{2}/3.$$

Virful V al piramidei din care provine trunchiul se obține prin intersecția planelor fețelor laterale. Piramida fiind regulată, înălțimea coincide cu OO' , iar apotema coincide cu EE' și deci $OO' \cap EE' = \{V\}$. Din $\triangle VO'E' \sim \triangle VOE$ rezultă $VO'/VO = O'E'/OE$ sau $VO'/(VO' + a\sqrt{2}) = 1/3$, de unde $VO' = a\sqrt{2}/2$ și $VO = VO' + OO' = 3a\sqrt{2}/2$.

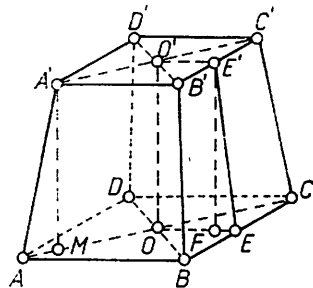


Fig. I. 19. F

I.20. A. Fie $z = x + iy$, cu $|z| = 1$. Vom arăta că $z = \frac{1+ai}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$. Din

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, rezultă $x, y \in [-1, 1]$. Dar $\frac{1-b^2}{1+b^2} \in [-1, 1]$, $\forall b \in \mathbb{R}$ și deci

putem considera $x = \frac{1-b^2}{1+b^2}$, iar pe y îl determinăm din relația $x^2 + y^2 = 1$;

se obține $y = \pm \frac{2b}{1+b^2}$. Rezultă

$$x + iy = \frac{1-b^2}{1+b^2} \pm \frac{2b}{1+b^2} \cdot i = \frac{(1 \pm bi)^2}{(1+bi)(1-bi)}.$$

Dacă în fața lui b la numărător apare semnul „+” se ia $b = a$ și atunci

$$x + iy = \frac{1+ai}{1-ai}, \forall a \in \mathbb{R},$$

iar dacă apare semnul „-” se ia $b = -a$ și atunci

$$x + iy = \frac{1-ai}{1+ai}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, se presupune $z = \frac{1+ai}{1-ai}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ și se arată că $|z| = 1$.

Într-adevăr,

$$|z| = \frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1.$$

Dar Altfel, din $|z| = 1$ rezultă $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, unde $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$.

$$\cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}, \quad \sin \varphi = \frac{2\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}$$

și deoarece $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$ rezultă $\operatorname{tg}(\varphi/2) \in \mathbb{R}$. Notăm $\operatorname{tg}(\varphi/2) = a \in \mathbb{R}$ și atunci

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} + i \frac{2a}{1 + a^2} = \frac{1 + ai}{1 - ai}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, din $z = \frac{1 + ai}{1 - ai}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ rezultă $|z| = \frac{|1 + ai|}{|1 - ai|} = 1$, pentru că $|z_1| = |\bar{z}_1|$.

B. Presupunem că termenii șirului sînt în progresie aritmetică, adică $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = r$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} &= \frac{1}{r} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} x_n} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{n-1}{x_1 x_n}, \text{ unde } x_n - x_1 = r(n-1). \end{aligned}$$

Reciproc, dacă există relația din problemă atunci termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sînt în progresie aritmetică. Pentru demonstrație vom folosi metoda inducției matematice.

Pentru $n = 3$ avem $1/x_1 x_2 + 1/x_2 x_3 = 2/x_1 x_3$ sau $x_3 + x_1 = 2x_2$, care reprezintă condiția ca numerele x_1, x_2, x_3 , să fie în progresie aritmetică.

Pentru $n = 4$ avem $1/x_1 x_2 + 1/x_2 x_3 + 1/x_3 x_4 = 3/x_1 x_4$ sau $2/x_1 x_3 + 1/x_3 x_4 = 3/x_1 x_4$ de unde $2x_4 + x_1 = 3x_3 \Leftrightarrow 2(x_4 - x_3) = x_3 - x_1 = 2r$ și deci x_1, x_2, x_3, x_4 sînt în progresie aritmetică.

Presupunem că relația

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \frac{n-1}{x_1 x_n}$$

conduce la progresia aritmetică $x_1, x_2, \dots, x_n$; să arătăm că relația

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} + \frac{1}{x_n x_{n+1}} = \frac{n}{x_1 x_{n+1}}$$

conduce la progresia aritmetică $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Înlocuind

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \frac{n-1}{x_1 x_n},$$

obținem

$$\frac{n-1}{x_1 x_n} + \frac{1}{x_n x_{n+1}} = \frac{n}{x_1 x_{n+1}} \text{ sau } (n-1)x_{n+1} + x_1 = nx_n, \text{ de unde } (n-1) \cdot (x_{n+1} - x_n) = x_n - x_1.$$

Dar $x_n - x_1 = (n-1)r$, astfel că $x_{n+1} - x_n = r$, ceea ce ne arată că numerele $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică.

C. Folosind $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)$ și $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ecuația se scrie :

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x) = \sqrt{2}/2.$$

Notăm $\sin x + \cos x = t$, unde $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; prin ridicare la pătrat se determină $\sin x \cdot \cos x = (t^2 - 1)/2$, astfel că ecuația devine $t[1 - (t^2 - 1)/2] = \sqrt{2}/2$ sau $t^3 - 3t + \sqrt{2} = 0$. Se constată că o rădăcină a acestei ecuații este $t = \sqrt{2}$; prin urmare ecuația se scrie sub forma : $(t - \sqrt{2}) \cdot (t^2 + \sqrt{2}t - 1) = 0$, de unde $t_1 = \sqrt{2} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $t_2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ și $t_3 = (-\sqrt{2} - \sqrt{6})/2 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Se obțin deci ecuațiile trigonometrice $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ și $\sin x + \cos x = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ echivalente respectiv cu ecuațiile $\sin(x + \pi/4) = 1$ și $\sin(x + \pi/4) = (\sqrt{3} - 1)/2$, de unde

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

respectiv

$$x \in \left\{ (-1)^l \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + l\pi - \frac{\pi}{4} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Deci mulțimea de soluții pentru ecuația dată este :

$$S = \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^l \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + l\pi - \frac{\pi}{4} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ de centru O și rază R circumscris triunghiului ABC și P un punct pe acest cerc (fig. I.20.D). Fie D, E și F proiecțiile punctului P pe AB, AC și BC , respectiv. Vom demonstra că punctele D, E, F sunt coliniare, ceea ce revine la a arăta că unghiul

$\widehat{FDE}$ este alungit, sau $\widehat{FDB} \equiv \widehat{ADE}$.

Patrulateralele convexe $PDEA$ și $PFBD$ sunt inscriptibile pentru că: $m(\widehat{PDA}) = m(\widehat{PEA}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{PFB}) + m(\widehat{PDB}) = 180^\circ$. Din patrulaterul inscriptibil $PDEA$ rezultă $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{APE})$, iar din triunghiul

dreptunghic PEA rezultă $m(\widehat{APE}) = 90^\circ - m(\widehat{PAE}) = 90^\circ - m(\widehat{PBC})/2$ astfel că $m(\widehat{ADE}) = 90^\circ - m(\widehat{PBC})/2$ (1). Din patrulaterul inscriptibil, $PFBD$ și triunghiul dreptunghic PFB se arată analog că $m(\widehat{FDB}) = 90^\circ - m(\widehat{PBC})/2$. (2). Din (1) și (2) rezultă $\widehat{FDB} \equiv \widehat{ADE}$ și deoarece punctele A, D, B sunt coliniare, rezultă punctele F, D, E coliniare.

Reciproc, presupunem P în planul triunghiului ABC și proiecțiile lui pe laturi ca fiind punctele coliniare D, E, F . Vom demonstra că punctul P se află pe cercul circumscris triunghiului ABC . Aceasta revine la a arăta că patrulaterul $APBC$ este inscriptibil.

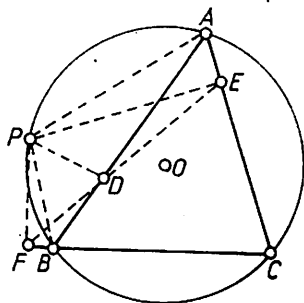


Fig. I.20.D)

Folosim teorema unghiului exterior pentru $\triangle BFP$ și faptul că patrulaterul $BFPD$ este inscriptibil; avem $m(\widehat{CBP}) = m(\widehat{BFP}) + m(\widehat{BPF}) = 90^\circ + m(\widehat{BDF})$ (3). Din triunghiul dreptunghic APE și patrulaterul

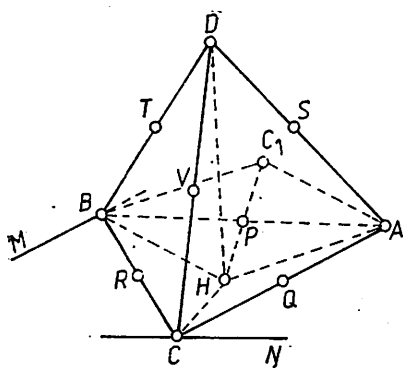


Fig. I.20.E

inscriptibil $AEDP$ se obține $m(\widehat{PAE}) = 90^\circ - m(\widehat{APE}) = 90^\circ - m(\widehat{ADE})$ (4). Punctele E, D, F fiind coliniare, $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BDF})$ astfel că relațiile (3) și (4) dau: $m(\widehat{CBP}) + m(\widehat{PAE}) = 180^\circ$, adică $APBO$ este inscriptibil.

E.1. În planul (ABC) se duc prin B și C dreptele $BM \parallel AC$ și $CN \parallel AB$ (fig. I.20.E). Din $BD \perp AC$ și $AC \parallel BM$ rezultă $BD \perp BM$; analog, $CD \perp AB$, $AB \parallel CN \Rightarrow CD \perp CN$. Fie $DH \perp (ABC)$. Din $DH \perp (ABC)$ și $BD \perp BM$, conform

teoremei reciproce a celor trei perpendiculare, rezultă $BH \perp BM$, care, împreună cu $BM \parallel AC$, ne conduce la $BH \perp AC$. Analog se arată că $CH \perp AB$ și deci H este ortocentrul triunghiului ABC .

Fie C_1 punctul diametral opus lui C în cercul circumscris triunghiului ABC . Se observă că AC_1BH este paralelogram ($C_1A \perp CA$ ($\triangle$ dr. CAC_1), $BH \perp AC$ adică $AC_1 \parallel BH$ și analog $BC_1 \parallel AH$), astfel că $AC_1 = BH$ și $BC_1 = AH$. Din triunghiurile dreptunghice CAC_1 și CBC_1 se obține $AC^2 + AC_1^2 = BC^2 + BC_1^2$ sau $AC^2 + BH^2 = BC^2 + AH^2$ (1).

Analog, considerind punctul A_1 diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului ABC , se obține $AC^2 + BH^2 = AB^2 + CH^2$ (2).

Pe de altă parte, din triunghiurile dreptunghice AHD , BHD , CHD , avem: $AH^2 = AD^2 - DH^2$, $BH^2 = BD^2 - DH^2$, $CH^2 = CD^2 - DH^2$ (3). Din relațiile (1), (2), (3) se obțin egalitățile cerute.

2. Fie P, Q, R, S, T, V respectiv mijloacele muchiilor AB, AC, BC, AD, BD, CD (fig. I.20.E). Avem $RQ \parallel AB$, $RQ = AB/2$ (linie mijlocie în $\triangle ABC$); analog $SQ \parallel CD$, $SQ = CD/2$. Dar, prin ipoteză, $AB \perp CD$ și cum $RQ \parallel AB$, $SQ \parallel CD$, rezultă $RQ \perp SQ$ și deci punctele R, S, Q se află pe sfera de diametru RS , cu $RS^2 = RQ^2 + SQ^2 = (AB^2 + CD^2)/4$ (4).

De asemenea, $RT \parallel CD$, cu $RT = CD/2$ și $RT \perp RQ$, astfel că punctele Q, R, T se află pe sfera de diametru QT și $QT^2 = (AB^2 + CD^2)/4 = RS^2$, de unde $QT = RS$.

În mod cu totul analog se arată că toate punctele P, Q, R, S, T și V se află pe aceeași sferă a cărei centru se găsește la intersecția dreptelor PV, RS și QT (pentru punctele P, R, V se folosesc egalitățile $PV^2 = VR^2 + RP^2 = (BD^2 + AC^2)/4 = (AB^2 + CD^2)/4$ rezultate de la punctul 1).

I.21. A. Deoarece $\sqrt{a^2} = |a|$, ecuația este echivalentă cu

$$|x - 2| + |x - 4| = 2. \quad (1)$$

Dar

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{pentru } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{pentru } x < 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad |x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{pentru } x \geq 4 \\ -x + 4, & \text{pentru } x < 4. \end{cases}$$

Deosebim următoarele cazuri :

1°. $x \in (-\infty, 2)$; ecuația (1) se scrie : $-x + 2 - x + 4 = 2 \Leftrightarrow -2x = -4$, de unde $x = 2 \notin (-\infty, 2)$, adică ecuația nu are soluție.

2°. $x \in [2, 4)$; ecuația (1) devine : $x - 2 - x + 4 = 2$, egalitate verificată de orice $x = a \in [2, 4)$ și ecuația admite o infinitate de soluții.

3°. $x \in [4, +\infty)$; ecuația (1) ia forma $x - 2 + x - 4 = 2$, de unde $x = 4 \in [4, +\infty)$ soluție a ecuației date.

În concluzie, ecuația dată admite o infinitate de soluții situate în intervalul închis $[2, 4]$, adică $x = m \in [2, 4]$.

B. Din f divizibil cu $(X - 1)^2$, rezultă f divizibil cu $X - 1$ și potrivit teoremei lui Bézout avem $f(1) = 0$, adică $p + q + 2 = 0$ și deci $q = -p - 2$. Înlocuind în f se obține $f = pX^{n+2} - pX^n - 2X^n + 2$, sau $f = pX^n(X^2 - 1) - 2(X^n - 1)$ și de aici rezultă $f = (X - 1) \cdot (pX^{n+1} + pX^n - 2X^{n-1} - 2X^{n-2} - \dots - 2X - 2)$. Din $(X - 1)^2 | f$ rezultă că polinomul $g = pX^{n+1} + pX^n - 2X^{n-1} - \dots - 2X - 2$ este divizibil cu $X - 1$, adică $g(1) = 0$ care ne conduce la $2p - 2n = 0$, de unde $p = n$ și deci $q = -n - 2$.

Altfel : Aplicăm schema lui Horner pentru $x_{1,2} = 1$ rădăcinile polinomului f :

X^{n+2}	X^{n+1}	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}		X^0	r	
p	0	q	0	0		2		
p	p	$p+q$	$p+q$	$p+q$		$p+q$	$p+q+2$	1
	p	$2p$	$3p+q$		$(n+1)p+(n-1)q$	$(n+2)p+nq$		1

Condiția $x_{1,2} = 1$ rădăcini ale polinomului f conduce la sistemul $p + q + 2 = 0$, $(n + 2)p + nq = 0$, care admite soluțiile $p = n$ și $q = -n - 2$.

C. Din relația $z + 1/z = 2 \sin \alpha$ se obține ecuația $z^2 - 2z \sin \alpha + 1 = 0$ care admite soluțiile $z_{1,2} = \sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha - 1}$, adică

$$z_{1,2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \pm i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Pentru

$$z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

expresia dată devine :

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = \cos n \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin n \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(-n \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(-n \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right) \Leftrightarrow z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = 2 \cos n \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Același rezultat se obține pentru

$$z_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

D. Vom arăta că $m(\widehat{MM'N'}) + m(\widehat{MNN'}) = 180^\circ$ (fig. I.21.D.)
 Avem :

$$m(\widehat{MM'N'}) = \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{ACN'}) \text{ și } m(\widehat{MNN'}) = \frac{1}{2} (m(\widehat{AC}) + m(\widehat{N'M'B})).$$

Dar $m(\widehat{AO}) = m(\widehat{AB})$, astfel că

$$m(\widehat{MM'N'}) + m(\widehat{MNN'}) = \frac{1}{2} \cdot (m(\widehat{ACN'}) +$$

$$+ m(\widehat{N'M'B}) + m(\widehat{BA})) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ,$$

adică patrulaterul $MNN'M'$ este inscribil.

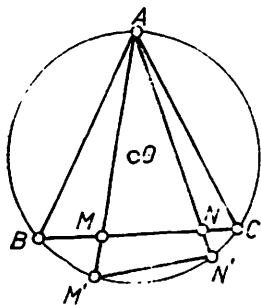


Fig. I.21.D

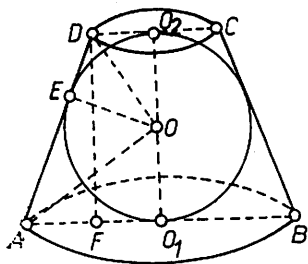


Fig. I.21.E

E. Fie $(ABOD)$ secțiunea axială în trunchiul de con, $AO_1 = R_1 = R\sqrt{3}$, $DO_2 = R_2$ și O centrul sferei înscrise în trunchiul de con (fig. I.21.E). Conform proprietății tangentelor duse dintr-un punct exterior la sferă, putem scrie $DE = DO_2 = R_2$, $AE = AO_1 = R\sqrt{3}$. De aici rezultă $AD = g = R\sqrt{3} + R_2$. Fie F proiecția lui D pe AB . Atunci $FO_1 = R_2$ și $AF = R\sqrt{3} - R_2$. Din triunghiul dreptunghic AFD , în care $DF = O_1O_2 = 2R$, rezultă $(R\sqrt{3} + R_2)^2 - (R\sqrt{3} - R_2)^2 = 4R^2$, de unde $R_2 = R/\sqrt{3} = R\sqrt{3}/3$ u.l. și $g = R\sqrt{3} + R\sqrt{3}/3 = 4R\sqrt{3}/3$ u.l.

Altfel, potrivit datelor problemei, în $\triangle$ dr.

$$AO_1O \text{ avem: } \operatorname{tg}(\widehat{AOO_1}) = AO_1/OO_1 = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$m(\widehat{AOO_1}) = 60^\circ \text{ și atunci } m(\widehat{DOO_1}) = (1/2) \cdot (180^\circ - m(\widehat{EOO_1})) = 90^\circ - m(\widehat{AOO_1}) = 30^\circ, \text{ astfel că } DO_2 = OO_2 \cdot \operatorname{tg}(\widehat{DOO_2}) = R/\sqrt{3}.$$

Deci :

$$\sigma_i(T) = \pi \cdot \frac{4R\sqrt{3}}{3} \cdot \left(R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{16\pi R^2}{3} \text{ u.a.}$$

și

$$\varphi(T) = \frac{\pi \cdot 2R}{3} \cdot \left(3R^2 + R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{R^2}{3} \right) = \frac{26\pi R^3}{9} \text{ u.v.}$$

I.22. A.1. Domeniul de rezolvabilitate al ecuației este $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pentru orice $x \in \mathfrak{D}$ ecuația se scrie: $6 + 3x - 3 = 2x + 2 + x^2 - 1$, sau $x^2 - x - 2 = 0$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = -1 \notin \mathfrak{D}$. Prin urmare, admite soluția $x = 2$.

2. Pentru orice $x > 0$, în notația $\lg x = t$, $t \in \mathbb{R}$, ecuația se scrie $(1/12)t^2 = (1/3) - (1/8)2t \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$, de unde $t_1 = 1$, $t_2 = -4$. Din $\lg x = 1$ se obține $x_1 = 10$, iar din $\lg x = -4$ se obține $x_2 = 10^{-4}$.

3. Înlocuind $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ și $\sin x = y$, $y \in [-1, 1]$, ecuația se mai scrie $1 - 2y^2 + 2y - 3/2 = 0$ sau $4y^2 - 4y + 1 = 0$, de unde $y_{1,2} = 1/2 \in [-1, 1]$, adică $\sin x = 1/2$ și deci

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Cu notațiile $x + y = s$ și $xy = p$ sistemul se scrie :

$$\begin{cases} p + s = 7 \\ p - 3s = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 7 - s \\ 7 - s - 3s = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4s = 16 \\ p = 7 - s, \end{cases}$$

de unde $s = 4$ și $p = 3$.

Din $x + y = 4$ și $xy = 3$ rezultă ecuația $z^2 - 4z + 3 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = 3 = x$, $z_2 = 1 = y$ sau $z_1 = 1 = x$, $z_2 = 3 = y$, astfel că soluțiile sistemului în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sint $(3, 1)$, $(1, 3)$.

C. Vezi I.16.D.1.

D. Potrivit datelor problemei, EF este linie mijlocie în $\triangle ABC$ (fig. I.22.D), astfel că $EF \parallel BC$ și $AO \equiv OD$. Din $AD \perp BC$ și $EF \parallel BC$ rezultă că $AD \perp EF$, adică patrulaterul $AEDF$ are diagonalele perpendiculare. Din $AO = OD$ și $EF \perp AD$, rezultă că triunghiurile AED și AFD sint isoscele : $AE \equiv ED$ și $AF \equiv FD$ și ca urmare triunghiurile AEF și DEF sint congruente.

Deci $m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{EDF}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{EAF}) + m(\widehat{EDF}) = 180^\circ$, ceea ce ne spune că patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil.

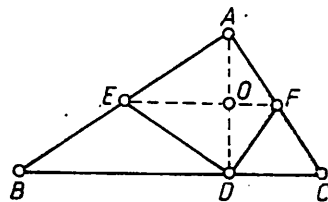


Fig. I.22. D

E. Fie $(ABOD)$ secțiunea axială a trunchiului de con dat (fig. I.22.E). Generatoarele AD și BC se intersectează în V dînd conul $[VAB]$. Trunchiul fiind circular drept, rezultă că punctele O_1 , O_2 , V sint coliniare.

1. Din datele problemei rezultă $AE = 6$ u.l., iar din triunghiul dreptunghic AED se obține $DE = 8$ u.l. Deci

$$\sigma_4(T) = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 546\pi \text{ u.a.}$$

$$\text{și } \varphi(T) = \pi(h/3)(R^2 + Rr + r^2) = 1176\pi \text{ u.v.}$$

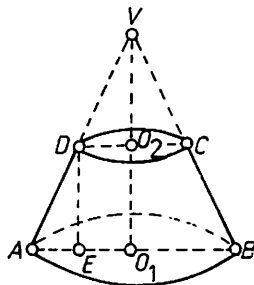


Fig. I.22.E

2. Folosind asemănarea triunghiurilor AO_1V și AED putem scrie rapoartele : $VO_1/DE = AO_1/AE = VA/AD$, de unde $VO_1 = 20$ u.l. și $VA = 25$ u.l. Deci $\sigma_1(C) = 375\pi$ u.a. și $\varphi(C) = 1500\pi$ u.v.

I.23. A.1.1. Notînd $x^2 = t > 0$ ecuația se scrie : $3t^2 + 2t - 5 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = -5/3$. Din $x^2 = 1$ se obține $x_{1,2} = \pm 1$, iar $x^2 = -5/3$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

2. Înlocuind $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ecuația se scrie $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$, care conduce la ecuațiile $\sin x = 0$ cu soluțiile $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ și $\sin x + 2 = 0$, ecuație imposibilă pentru că $\sin x \in [-1, 1]$.

3. Ecuația are coeficienți întregi și dacă admite rădăcini întregi atunci acestea se află printre divizorii termenului liber -24 . Se constată că $x = 3$ este o rădăcină a ecuației. Prin urmare, polinomul $f = X^3 - X - 24$ se divide prin $X - 3$. Aplicînd schema lui Horner se obține $f = (X - 3)(X^2 + 3X + 8)$. Deoarece $x^2 + 3x + 8 = 0$ pentru $x_{2,3} = (-3 \pm i\sqrt{23})/2 \in \mathbb{C}$, rezultă că ecuația admite rădăcina reală $x = 3$.

B. Potrivit teoremei lui Bézout $X - 2 | f$ dacă $f(2) = 0$, care conduce la $14 \cdot 2^n - 2^{n-1} - 8 \cdot 3^{n-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{n-1} \cdot 3^3 = 2^3 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow (2/3)^{n-1} = (2/3)^3 \Rightarrow n - 1 = 3 \Leftrightarrow n = 4$.

C. Potrivit figurii I.21.E avem $AE = AO_1$ ca tangente duse din A la cerc; analog $DE = DO_2$. Prin urmare $AD = AE + ED \Leftrightarrow a = R +$

$+r$ (1), unde $R = AO_1 = AE$ și $r = DO_2 = DE$. În plus, din $\triangle dr.$ AOD , în care $m(\widehat{AOD}) = (1/2)m(\widehat{O_1OE}) + (1/2)m(\widehat{EOO_2}) = 90^\circ$, teorema înălțimii se scrie: $OE^2 = AE \cdot ED \Leftrightarrow b^2 = R \cdot r$ (2). Rezultă:

$$\begin{aligned}\sigma_1(T) &= \pi g(R+r) = \pi a^2 \text{ și } \varphi(T) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) = \\ &= \frac{\pi h}{3} [(R+r)^2 - Rr] = \frac{2b\pi}{3} (a^2 - b^2).\end{aligned}$$

Observație. Din (1) și (2) se obține: $R = (a + \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$, $r = (a - \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$.

I.24. A.1. Folosind semnul funcției de gradul doi, inecuația are loc pentru $x \in [-1, 2]$.

2. Ecuația se scrie: $5^{1-2x} = 5^3 \Rightarrow x = -1$.

3. Sistemul conduce la ecuația de gradul doi: $t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, t_2 = 3$ astfel că $x = -2, y = 3$ sau $x = 3, y = -2$.

B.1. Se aplică schema lui Horner:

X^4	X^3	X^2	X	X^0	r
2	-1	0	-1	-1	-1
	2	-3	3	-4	3

Prin urmare citul este $2X^3 - 3X^2 + 3X - 4$, iar restul 3.

2. Ecuația dată este echivalentă cu ecuațiile: $\cos x = 0$, $\cos x = 1/3$ și deci

$$\begin{aligned}x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{1}{3} + 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \arccos \frac{1}{3} + 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.\end{aligned}$$

3. Relația de demonstrat este echivalentă cu:

$$\frac{b+c}{c} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \sin \left(\frac{A}{2} + C \right)}{\sin C}.$$

Folosind $A + B + C = \pi$, observăm că

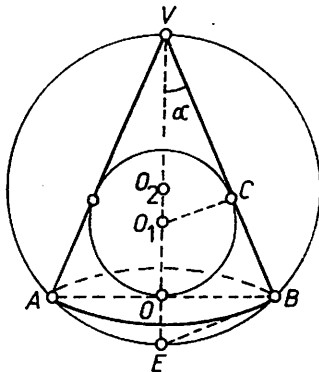


Fig. I.24.C

$$\begin{aligned}2 \cos \frac{A}{2} \sin \left(\frac{A}{2} + C \right) &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B+C}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \sin B + \sin C.\end{aligned}$$

Deci $(b+c)/c = (\sin B + \sin C)/\sin C$, relație evidentă dacă se ține seama de teorema sinusurilor.

C.1. Potrivit notațiilor figurii I.24.C, din $\triangle dr.$ O_1CV , avem: $VO_1 = O_1C/\sin \alpha = r/\sin \alpha$, astfel că $VO = r(1 + \sin \alpha)/\sin \alpha$.

Din $\triangle$ dr. VOB se obține : $OB = R = VO \cdot \operatorname{tg} \alpha = r(1 + \sin \alpha) / \cos \alpha$
 și $VB = VO / \cos \alpha = r(1 + \sin \alpha) / \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Aria laterală a conului este :
 $\sigma_1(O) = \pi Rg = \pi r^2(1 + \sin \alpha)^2 / \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

2. Avem ecuația : $(1 + \sin \alpha)^2 / \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 3 / \sin \alpha \Leftrightarrow (1 + \sin \alpha)^2 = 3 \cos^2 \alpha$ (deoarece $\alpha \in (0, \pi/2)$) $\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -1/2$ și $\sin \alpha = -1$. Se obține

$$\alpha \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^l \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\} \subset \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

de unde $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

3. Fie O_2 centrul sferei circumscrise conului, $VO_2 = R_1$ raza acesteia și E punctul diametral opus lui V . Din $\triangle$ dr. VBE avem :

$$VE = \frac{VB}{\cos \alpha}, \text{ de unde } R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{r}{2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}.$$

Volumul sferei circumscrise conului este :

$$\mathcal{V}(S) = \frac{4\pi R_1^3}{3} = \frac{\pi r^3}{6 \sin^3 \alpha (1 - \sin \alpha)^3}.$$

I.25. A.1. Notind $3^x = t$, $t > 0$, ecuația se scrie : $t^2 - 4t + 3 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Prin urmare $3^x = 1$ și $3^x = 3$, de unde, pe baza injectivității funcției exponențiale se obține $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ ca soluții ale ecuației.

2. Ecuația se scrie succesiv : $(\sin 3x - \sin x) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \sin x - 1) = 0$, de unde se obțin ecuațiile : $\cos 2x = 0$, $2 \sin x - 1 = 0$ cu soluțiile :

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

și respectiv

$$x \in \left\{ (-1)^l \cdot \frac{\pi}{6} + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^l \cdot \frac{\pi}{6} + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Condițiile de existență pentru ecuație sînt :

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} > 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} \neq 1 \\ x^2 - 3x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) \\ x \neq 2 \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de unde domeniul de rezolvabilitate a ecuației : $\mathfrak{D} = (-\infty, -1) \cup (1/2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Folosind injectivitatea funcției logaritmice, se obține ecuația $x^2 - 3x + 3 = 1$ cu rădăcinile $x_1 = 1 \in \mathfrak{D}$, $x_2 = 2 \notin \mathfrak{D}$. Prin urmare ecuația admite soluția $x = 1$.

4. Este o ecuație reciprocă de gradul trei. Avem : $x^2(x+1) + (x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0$ cu rădăcinile $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \pm i$.

B. Condiții de existență: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Scriem logaritmi în baza a folosind formula $\log_b N = \log_a N / \log_a b$ și notăm $\log_a x = t$; avem:

$$t - t/2 + t/4 \geq 3/4 \Leftrightarrow t \geq 1 \text{ adică } \log_a x \geq 1 \quad (1).$$

Pentru $a > 1$, funcția logaritmică este strict crescătoare și deci $x \geq a$, adică $x \in [a, +\infty)$.

Pentru $0 < a < 1$ funcția logaritmică este strict descrescătoare și din (1) rezultă $x \leq a$, adică $x \in (0, a]$.

C. Se folosește teorema cosinusului:

$$b \cdot \cos C + c \cdot \cos B = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a.$$

D. vezi I.18.B.

E.1. Din $\triangle dr. AHB$ avem $AB = AH / \sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$ și $BH = AB \cdot \cos 30^\circ = 3$; $HC = BC - BH = 1$. Din $\triangle dr. AHC$: $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 2$ (fig. I.25.E).

2. Deoarece $DE \parallel BC$, în $\triangle ABC$ rezultă relațiile:

$$(a) \frac{AB}{DB} = \frac{AH}{IH} = \frac{AC}{EC} \quad (\text{teorema lui}$$

Thales),

$$(b) \frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AH} \quad (\text{raportul de asemănare}$$

este egal cu raportul înălțimilor).

Din (a) se obține $DB = AB \cdot IH / AH = 2\sqrt{3}/3$, $EC = AC \cdot IH / AH = 2/3$, iar din (b): $DE = AI \cdot BC / AH = 8/3$.

3. Aria totală a corpului este suma ariilor laterale ale conurilor DBD' , ECE' și a cilindrului $DEE'D'$, adică

$$\sigma_t = \pi \cdot IH \cdot (BD + CE) + 2\pi \cdot IH \cdot DE = \frac{2(1 + 3\sqrt{3})}{3} \cdot \pi.$$

Volumul corpului de rotație este:

$$V = \pi \cdot IH^2 \cdot \left(\frac{BO_1}{3} + \frac{CO_2}{3} + O_1O_2 \right) = \pi \cdot IH^2 \cdot \frac{BC + 2DE}{3} = \frac{28}{27} \pi.$$

I.26. A. Din sistem rezultă $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ridicînd prima ecuație la pătrat și ținînd seama de a doua, se obține $x + y + 2\sqrt{xy} = 25$, de unde $\sqrt{xy} = 6$, adică $xy = 36$. Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0, \text{ de unde } z_1 = 4, z_2 = 9.$$

Prin urmare soluțiile în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului dat sînt $(4, 9)$, $(9, 4)$.

B. Folosind proprietățile logaritmilor și monotonia funcției logaritmice, inecuația se scrie succesiv astfel :

$$\lg [2 \cdot (4^{x-2} + 9)] \leq \lg [10 \cdot (2^{x-2} + 1)] \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} + 9 \leq 5 \cdot 2^{x-2} + 5.$$

Notăm $2^{x-2} = y$, $y > 0$ și inecuația devine : $y^2 - 5y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [1, 4] = [2^0, 2^2]$. Deci $2^{x-2} \in [2^0, 2^2] \Leftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 2$ adică $x \in [2, 4]$.

C. Înlocuind

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

ecuația se scrie :

$$\begin{aligned} z^3 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \text{ de unde } z_k = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \\ &= \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Prin urmare, soluțiile ecuației date sînt: $z_0 = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i \cdot 1/2$, $z_1 = \cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + i \cdot 1/2$, $z_2 = \cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2) = -i$.

Altfel. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$; atunci $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ și ecuația se scrie $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = 0 + i$, de unde se obține sistemul :

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemele :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Sistemul (1) are soluția reală $x = 0$, $y = -1$, astfel că o soluție a ecuației este $z_1 = -i$.

Sistemul (2) se scrie :

$$\begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ 8y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1/2 \text{ și } x^2 = 3/4, \text{ adică } x_{1,2} = \pm \sqrt{3}/2.$$

Prin urmare, ecuația dată admite și soluțiile

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}.$$

Observație. Se verifică ușor că $z_1 = -i$ este o soluție a ecuației $z^3 - i = 0$. Împărțind ecuația prin $z + i$ se obține $z^2 - iz - 1 = 0$ cu soluțiile $z_{2,3} = (i \pm \sqrt{3})/2$.

D. Fie $ABCD$ patrulaterul convex în care $AC \cap BD = \{O\}$ și M, N, P, Q proiecțiile lui O pe laturi (fig. I.26.D). Arătăm că dacă patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil, atunci diagonalele AC și BD sînt perpendiculare. Într-adevăr, din patrulaterul inscriptibil $AMOQ$ rezultă că $m(\widehat{AOQ}) = m(\widehat{AMQ})$. Dar $m(\widehat{AMQ}) + m(\widehat{QMO}) = 90^\circ$ și deci $m(\widehat{AOQ}) +$

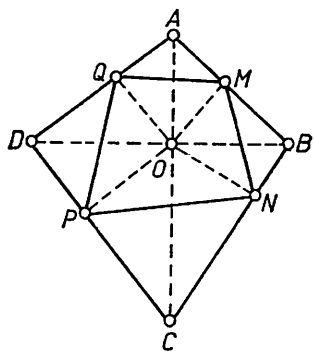


Fig. I.26.D

$+ m(\widehat{QMO}) = 90^\circ$ (1). În mod analog, din patrulaterul inscriptibil $QOPD$, $PCNO$ și $NOMB$ se obțin, respectiv, egalitățile: $m(\widehat{QOD}) + m(\widehat{QPO}) = 90^\circ$ (2), $m(\widehat{NOC}) + m(\widehat{OPN}) = 90^\circ$ (3) și $m(\widehat{NOB}) + m(\widehat{NMO}) = 90^\circ$ (4). Adunînd membru cu membru egalitățile (1), (2), (3), (4) și ținînd seama că $m(\widehat{QMO}) + m(\widehat{NMO}) + m(\widehat{QPO}) + m(\widehat{OPN}) = m(\widehat{QMN}) + m(\widehat{QPN}) = 180^\circ$ (patrulaterul $MNPQ$ este presupus inscriptibil), rezultă $m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{COB}) = 180^\circ$ (5). Unghiurile $\widehat{AOD}$ și $\widehat{COB}$ sînt opuse la vîrf, adică $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{COB})$, astfel că (5) dă $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{COB}) = 90^\circ$, adică $AC \perp BD$.

Reciproc, presupunem că în patrulaterul convex $ABCD$ diagonalele sînt perpendiculare și arătăm că proiecțiile pe laturi a punctului O de intersecție a diagonalelor formează patrulaterul $MNPQ$ inscriptibil. Pentru aceasta, folosindu-ne de patrulaterul inscriptibil $QAMO$, $PDQO$, $PONC$ și $MBNO$, putem scrie respectiv egalitățile (1), (2), (3), (4). Adunînd membru cu membru aceste egalități și folosind ipoteza $AC \perp BD$, adică $m(\widehat{AOQ}) + m(\widehat{QOD}) = m(\widehat{NOC}) + m(\widehat{NOB}) = 90^\circ$, rezultă $m(\widehat{QMN}) + m(\widehat{NPQ}) = 180^\circ$, ceea ce arată că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

E. Folosind datele problemei și formula ariei laterale a trunchiului de con, obținem sistemul: $\pi g(R + r) = 4\pi a^2$, $g = R + r$, de unde $g = 2a$ u.l.

Potrivit figurii I.22.E, putem scrie: $(R - r)^2 = 4a^2 - a^2$, adică $R - r = a\sqrt{3}$. Din sistemul $R + r = 2a$, $R - r = a\sqrt{3}$ se obține $R = a(2 + \sqrt{3})/2$ u.l. și $r = a(2 - \sqrt{3})/2$ u.l.

Din $\triangle AED \sim \triangle AO_1V$ (vezi fig. I.22.E) rezultă $VA/2a = a(2 + \sqrt{3})/(2a\sqrt{3})$, de unde $VA = G = a(3 + 2\sqrt{3})/3$ u.l. Deci $\sigma_1(C) = \pi RG = \pi a^2 (12 + 7\sqrt{3})/6$ u.a.

F.1. Folosind formulele:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \text{ etc.}$$

și

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad R = \frac{abc}{4S}$$

putem scrie :

$$4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{abc}{S} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

de unde

$$4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = p.$$

2. Folosim teorema cosinusului : $6 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ$, de unde $b^2 + c^2 = 6 + bc$. Din $b + c = 3 + \sqrt{3}$ și $b^2 + c^2 = 6 + bc$ rezultă $bc = 2 + 2\sqrt{3}$ și

$$\sigma[ABC] = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

Observație. Lăsăm în seama rezolvitorului să calculeze aria și unghiurile triunghiului ABC dacă $m(\hat{C}) = 120^\circ$, $c = \sqrt{6}$ u.l. și $a + b = \sqrt{3} + 1$.

I.27. A. Condiții de existență : $x - 1 \geq 0$ și $x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$, de unde $x \geq 1$, astfel că domeniul de rezolvabilitate a ecuației este $\mathfrak{D} = [1, +\infty)$. Notăm $\sqrt{x-1} = t$, $t \geq 0$, de unde $x = t^2 + 1$ și ecuația se scrie

$$t + 1 + m \cdot |t - 1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + m \cdot |\sqrt{x-1} - 1| = 1. \quad (1)$$

Folosind

$$|\sqrt{x-1} - 1| = \begin{cases} -(\sqrt{x-1} - 1) & \text{pentru } x \in [1, 2), \\ \sqrt{x-1} - 1 & \text{pentru } x \in [2, +\infty), \end{cases}$$

se disting cazurile :

1°. $x \in [1, 2)$; ecuația (1) se scrie :

$$(1 - m) \cdot \sqrt{x-1} = 1 - m. \quad (2)$$

Dacă $m \neq 1$, atunci $\sqrt{x-1} = 1$, de unde $x = 2 \notin [1, 2)$.

Dacă $m = 1$, atunci ecuația (2) este satisfăcută pentru orice $x \in [1, 2)$.

2°. $x = 2$ este soluție a ecuației date pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

3°. $x \in (2, +\infty)$; ecuația (1) se scrie

$$(1 + m) \cdot \sqrt{x-1} = 1 + m. \quad (3)$$

Dacă $m \neq -1$ atunci $\sqrt{x-1} = 1$, de unde $x = 2 \notin (2, +\infty)$.

Dacă $m = -1$ ecuația (3) este satisfăcută pentru orice $x \in (2, +\infty)$.

În concluzie, ecuația dată admite soluția $x = 2$ pentru orice $m \in \mathbb{R}$; pentru $m = 1$ ecuația admite o infinitate de soluții $x = \alpha \in [1, 2]$, iar pentru $m = -1$ ecuația admite o infinitate de soluții $x = \beta \in [2, +\infty)$.

Observație. La ecuația (1) se poate ajunge folosind formula de transformare a radicalilor dubli în radicali simpli

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \text{ cu } C = \sqrt{A^2 - B}.$$

Avem :

$$\sqrt{x \pm 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} \pm \sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 1 \pm \sqrt{x-1}, & \text{pentru } x \in [1, 2) \\ 1 \pm 1, & \text{pentru } x = 2 \\ \sqrt{x-1} \pm 1, & \text{pentru } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

B. Avem următoarele posibilități :

— echipa de 5 persoane poate fi constituită din 2 maiștri în C_2^5 moduri și 3 ingineri în C_3^2 moduri, adică într-un număr de $C_4^2 \cdot C_3^3$ moduri ;

— în echipă pot intra 3 maiștri și 2 ingineri și în acest caz numărul modalităților de constituire a echipei este $C_3^3 \cdot C_2^2$;

— în echipă pot intra 4 maiștri și un inginer, ceea ce se poate realiza în $C_4^4 \cdot C_1^1$ moduri.

Numărul total de moduri pentru alcătuirea echipei cerute este

$$C_4^2 \cdot C_3^3 + C_4^3 \cdot C_2^2 + C_4^4 \cdot C_1^1 = 301.$$

C. *Metoda 1.* Fie $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, cu $\varphi \in [0, 2\pi)$. Înlocuind

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \quad \bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

și ținând seama de operațiile cu numere complexe, ecuația se scrie :

$$|z|^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = |z| \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right).$$

De aici rezultă $|z| = 0$, adică $z_1 = 0$ și ecuația :

$$|z|^2 \cdot \left(\cos \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 1 \quad (1)$$

(am împărțit prin $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \neq 0$ știind că

$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 0$ și $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 0$ nu au loc simultan).

Ecuația (1) are loc dacă

$$|z|^2 \cdot \cos \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 1 \text{ și } |z|^2 \cdot \sin \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

adică

$$\sin \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \text{ și } \cos \left(4\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad |z|^2 > 0.$$

De aici rezultă $4\varphi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$, k -întreg astfel încît $\varphi \in [0, 2\pi)$ și $|z| = 1$. Pentru $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ se obțin soluțiile :

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}, \quad z_3 = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}, \quad z_4 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8},$$

$$z_5 = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}, \text{ iar pentru } k \geq 4, \quad \varphi \notin [0, 2\pi).$$

Metoda 2. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. Înmulțim ecuația cu z ; avem : $z^4 = izz$ sau $(x + iy)^4 = i(x^2 + y^2)$, de unde se obține sistemul :

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = 0 \\ 4xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Ridicînd ecuația a doua a sistemului la pătrat și făcînd notațiile $x^2 + y^2 = u \geq 0$, $x^2y^2 = v \geq 0$, obținem :

$$\begin{cases} u^2 - 8v = 0 \\ 16v \cdot (u^2 - 4v) = u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 8v \\ v(8v - 1) = 0. \end{cases}$$

De aici rezultă cazurile :

1°. $v = 0$, $u = 0$ și atunci $x = 0$, $y = 0$, adică $z_1 = 0$;

2°. $v = 1/8$, $u = 1$ și deci $x^2 + y^2 = 1$. Se obține deci ecuația $z^4 = i$, de unde :

$$z_j = \sqrt[4]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}, \quad j \in \{2, 3, 4, 5\},$$

sau

$$z_j = \cos \frac{\pi + 4k\pi}{8} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{8}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}; \quad j \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

Observație. Rezolvînd sistemul $x^2 + y^2 = 1$, $x^2y^2 = 1/8$ se pot determina soluțiile ecuației $z^4 = i$ sub formă algebrică.

D. Potrivit figurii I.27.D, $O_1H = O_2H = O_3H = R$, astfel că cercul circumscris $\Delta O_1O_2O_3$ este congruent cu cercurile date. Folosind proprietatea : „punctele de intersecție a două cercuri secante sînt simetrice față de linia centrelor și coarda comună este perpendiculară pe linia centrelor” și faptul că cercurile date sînt congruente, rezultă că M este mijlocul segmentelor $[O_1O_3]$ și $[BH]$, N este mijlocul segmentelor $[O_1O_2]$ și $[AH]$, iar P este mijlocul segmentelor $[O_2O_3]$ și $[CH]$. Prin urmare, MN este linie mijlocie în triunghiurile $O_1O_2O_3$ și AHB , adică $MN = O_2O_3/2 = AB/2$, de unde $AB \equiv O_2O_3$.

În mod cu totul analog se obțin rezultatele : $AC \equiv O_1O_3$ și $BC \equiv O_1O_2$, astfel că $\Delta ABC \equiv \Delta O_1O_2O_3$ și cercul circumscris ΔABC este congruent cu cercul circumscris $\Delta O_1O_2O_3$ și congruent cu cercurile date.

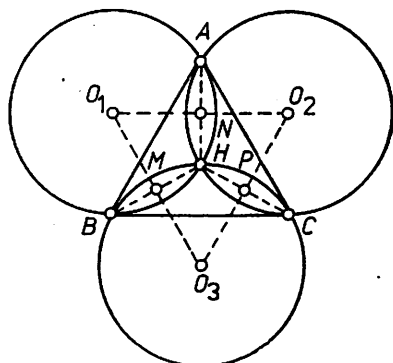


Fig. I.27.D

E. Problema poate fi reformulată mai clar astfel :

Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare și $E \in (AD)$. Să se demonstreze afirmația :

Condiția necesară și suficientă ca punctul E să împartă muchia AD în segmente proporționale cu ariile fețelor ABC și DBC este ca semiplanul închis limitat de dreapta BC și conținând punctul E să fie semiplan bisector al unghiului diedru determinat de semiplanele închise ce conțin fețele ABC și DBC .

Demonstrație.

Necesitatea. Presupunem că semiplanul închis limitat de dreapta BC și care conține punctul $E \in AD$ este semiplan bisector al unghiului diedru determinat de semiplanele închise ce conțin fețele ABC și DBC și arătăm că punctul E împarte muchia AD în segmente proporționale cu ariile triunghiurilor ABC și DBC (fig. 1.27.E). Pentru aceasta ducem proiecțiile punctelor A și D pe planul (BCE) și pe dreapta BC . Din $AA' \perp (BCE)$ și $AF \perp BC$, potrivit teoremei reciproce a celor trei perpendiculare, rezultă $AF \perp BC$. Analog, din $DD' \perp (BCE)$ și $DG \perp BC$, rezultă $DG \perp BC$. Deoarece, prin ipoteză,

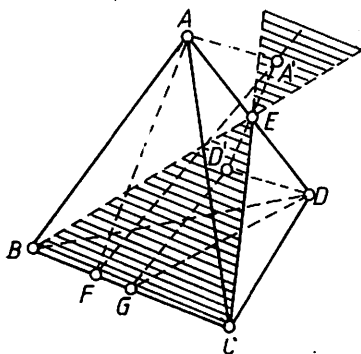


Fig. 1.27.E

$$m(\widehat{BC, A}; \widehat{BC, E}) = m(\widehat{BC, E}; \widehat{BC, D}),$$

rezultă $m(\widehat{AFA'}) = m(\widehat{DGD'})$ adică $\triangle dr. AA'F \sim \triangle dr. DD'G$, de unde se scrie : $AF/DG = AA'/DD'$ (1).

Folosind teorema : „dacă două drepte sînt perpendiculare pe un plan, atunci ele sînt paralele”, putem scrie $DD' \parallel AA'$ și

de aici $m(\widehat{EAA'}) = m(\widehat{EDD'})$, astfel că $\triangle dr. AA'E \sim \triangle dr. DD'E$, de unde $AA'/DD' = AE/DE$ (2). Din (1) și (2) se obține : $AF/DG = AE/DE$ (3). Dar $\sigma[ABC]/\sigma[DBC] = (AF \cdot BC/2) : (DG \cdot BC/2)$ (4). Din (3) și (4) rezultă că necesitatea este demonstrată.

Suficiența. Presupunem că $AE/DE = \sigma[ABC]/\sigma[DBC]$ (5) și demonstrăm că semiplanul închis $[BC, E]$ este semiplan bisector pentru

unghiul diedru $(\widehat{BC, A}; \widehat{BC, D})$.

Fie A' și D' respectiv proiecțiile punctelor A și D pe planul (BCE) . Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AA'E$ și $DD'E$ rezultă (2). Fie F și G respectiv proiecțiile punctelor A și D pe BC . Atunci din (4) rezultă $\sigma[ABC]/\sigma[DBC] = AF/DG$ și folosind (5) putem scrie $AE/DE = AF/DG$ (6). Din (2) și (6) rezultă $AA'/DD' = AF/DG$ și cum triunghiurile $AA'F$ și $DD'G$ sînt dreptunghice, urmează că ele sînt asemenea, adică

$m(\widehat{AFA'}) = m(\widehat{DGD'})$. Dar $\angle AFA'$ este unghi plan corespunzător unghiului diedru determinat de fața ABC și semiplanul închis limitat de dreapta BO și care conține punctul E ; la fel $\angle DGD'$ este unghi plan corespunzător unghiului diedru determinat de fața DBC și semiplanul închis limitat de dreapta BO și care conține punctul E . Rezultă că semiplanul închis limitat de dreapta BC și care conține punctul E este semiplan bisector al unghiului diedru definit de semiplanele închise limitate de dreapta BO și care conțin punctele A și respectiv D .

F.1. Folosind formulele:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \quad abc = 4RS,$$

$$r = \frac{S}{p} \text{ și } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

se obține :

$$\begin{aligned} 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &= 4R \cdot \sqrt{\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \right)^2} = \\ &= \frac{4R}{4RS} \cdot \frac{S^2}{p} = \frac{S}{p} = r. \end{aligned}$$

2. Înlocuind $R = 8r$ în relația de la punctul 1, se obține :

$$32 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 1. \quad (1)$$

Dar $2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{\pi}{3} -$
 $-\cos \left(\frac{\pi - C}{2} \right) = \frac{1}{2} - \sin \frac{C}{2}$ (s-a folosit $A + B + C = \pi$) și (1) devine

$$16 \cdot \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \cdot \sin \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow \left(4 \sin \frac{C}{2} - 1 \right)^2 = 0,$$

de unde

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{4}, \text{ adică } C = 2 \arcsin \frac{1}{4}.$$

Din $A + B = \pi - 2 \arcsin(1/4)$ și $A - B = 2\pi/3$ se obține $A = 5\pi/6 - \arcsin(1/4)$ și $B = \pi/6 - \arcsin(1/4)$.

I.28. A.1. Ecuația se scrie : $x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și $x^2 - 4 = 0$, de unde $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

2. Vezi I.26.A ; se obțin soluțiile : (1, 4), (4, 1).

3. Inecuația se scrie succesiv

$$\frac{x}{2-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2-x} < 0. \quad (1)$$

Se întocmește tabelul semnelor :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$2x - 2$	- - - 0 + + + + + + + + +			
$2 - x$	+ + + + + + + + 0 - - - - -			
$\frac{x - 2}{2x - 2}$	- - - - 0 + + +			- - - - -

Prin urmare, inecuația are loc pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Observație. Înmulțind în (1) atât numărătorul cât și numitorul cu $(2 - x)$, semnul fracției va fi dat de semnul numărătorului. Se obține $2(x - 1)(2 - x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

B.1. Se înlocuiește $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ și ecuația se scrie succesiv :
 $2 \sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ și $\sin x = 1/2$.
 De aici rezultă

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soluțiile ecuației situate în intervalul $[0, 2\pi]$ se obțin pentru $k = 0$ și $k = 1$, adică aceste soluții sînt : $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$.

2. Se impune condiția $\sin x \neq 0$ și se aplică formula

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}; \quad E = \frac{2 \sin x \cos(\pi/3)}{\sin x} = 1.$$

Altfel, se calculează $\sin(x + \pi/3)$ și $\sin(x - \pi/3)$ cu formulele $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$; se găsește :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x.$$

Înlocuind și impunînd condiția $\sin x \neq 0$, se obține $E = 1$.

3. Se aplică formula $\sigma[ABC] = a^2 \sin B \sin C/2 \sin A$, în care $m(\hat{A}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$ și $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Se obține $\sigma[ABC] = 9(3 - \sqrt{3})$.

Altfel, se calculează $m(\hat{A}) = 75^\circ$ și potrivit teoremei sinusurilor :

$$\frac{6}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}; \text{ se obține } b = \frac{6 \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}, \quad c = \frac{6 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

În continuare se aplică formula $\sigma[ABC] = (ab \sin C)/2$.

C.1. Paralelipipedul $[ABOD A'B'C'D']$ fiind drept, fețele laterale sînt dreptunghiuri și $8a^2 = 4a \cdot DD'$ (fig. I.28.C), de unde $DD' = 2a$.

Din $\varphi(P) = \sigma[ABCD] \cdot DD'$, cu $\sigma[ABCD] = a^2 \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}/2$ rezultă $\varphi(P) = a^3\sqrt{3}$.

2. Din faptul că fețele laterale sînt dreptunghiuri congruente rezultă $A'D = A'B = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$. Teorema cosinusului aplicată în $\triangle ABD$ conduce la $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos A} = a\sqrt{3}$.

Aria triunghiului isoscel $A'BD$ se determină folosind formula lui Herron (se cunosc laturile triunghiului) sau calculînd înălțimea $A'O$ a triunghiului isoscel $A'BD$. Se obține: $\sigma[A'BD] = a^2\sqrt{51}/4$.

Distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$ se obține calculînd în două moduri volumul piramidei $AA'BD$:

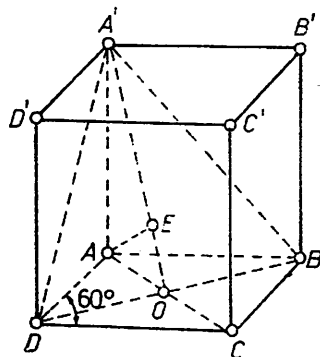


Fig. I.28. C.

$$\varphi([AA'BD]) = \frac{\sigma[ABD] \cdot AA'}{3} = \frac{\sigma[A'BD] \cdot d(A, (A'BD))}{3}.$$

Se obține $d(A, (A'BD)) = 2a/\sqrt{17}$.

Altfel, fie $d(A, (A'BD)) = AE$, adică $AE \perp (A'BD)$. Potrivit teoremei celor trei perpendiculare ($AE \perp (A'BD)$, $AO \perp BD$) rezultă $EO \perp BD$, adică $E \in A'O$. Scriind în două moduri aria triunghiului dreptunghic $A'AO$ se obține $AE = AA' \cdot AO/A'O = 2a/\sqrt{17}$.

I.29. A.1. Ecuația se scrie succesiv: $x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ și $x^2 + x - 2 = 0$. Se obțin soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

2. Ecuația există pentru $\cos 3x \neq 0$ și $\cos x \neq 0$. Aplicînd formula $\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \sin(u - v)/\cos u \cdot \cos v$, avem: $\sin 2x/\cos 3x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x/\cos 3x = 0$, de unde $\sin x = 0$, adică $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

B. Se notează $2^x = y$, $y > 0$, și inecuația se scrie $y^2 + 2y - 288 \leq 0$. Din $y^2 + 2y - 288 = 0$ rezultă $y_1 = -18$, $y_2 = 16$ astfel că $y^2 + 2y - 288 \leq 0$ are loc pentru orice $y \in [-18, 16]$, adică $2^x \in [0, 16]$. În baza surjectivității și monotoniei funcției exponențiale rezultă $x \in (-\infty, 4]$.

C. Din $(x^2 + y^2 - 1)(x - y) = x^3 - y^3 - xy(x - y) - (x - y)$ și $x - y = x^3 + y^3$ rezultă $(x^2 + y^2 - 1)(x - y) = -2y^3 - xy(x^3 + y^3) = -y[2y^2 + x(x^3 + y^3)] < 0$, deoarece $x > 0$, $y > 0$. În continuare, din $(x^2 + y^2 - 1)(x - y) < 0$ și $x - y = x^3 + y^3 > 0$, rezultă $x^2 + y^2 - 1 < 0$, adică $x^2 + y^2 < 1$.

D. Vezi I.26 punctul F.2; se obține

$$bc = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2 \cos A + 2} = 15 \text{ și } \sigma[ABC] = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

E. Prezentăm trei moduri de rezolvare.

1°. Fie $z = x + iy$, cu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Ecuația se scrie: $|2x^2 - 2y^2| = 2$.

Obținem sistemele :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases} \quad (2)$$

Sistemul (1) admite soluțiile (1, 0), (-1, 0), iar sistemul (2) admite soluțiile (0, 1), (0, -1). Deci numerele complexe căutate sînt :

$$z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i, z_4 = -i.$$

2. Se verifică ușor că oricare ar fi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avem $z^2 + \bar{z}^2 \in \mathbb{R}$. Din $|z| = 1$ rezultă $z \cdot \bar{z} = 1$ și ecuația se scrie : $|z^2 + 1/\bar{z}^2| = 2$, de unde rezultă ecuațiile $z^4 - 2z^2 + 1 = 0$ și $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$. Din prima se obține $z^2 = 1$, adică $z_{1,2} = \pm 1$, iar din a doua se obține $z^2 = -1$, adică $z_{3,4} = \pm i$.

3°. Din $|z| = 1$, rezultă $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, cu $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ecuația se scrie : $|\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi| = 2$, de unde $|\cos 2\varphi| = 1$ cu soluția

$$\varphi \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi),$$

adică $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = 3\pi/2$ și deci $z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$.

F.1. Din enunț și figura I.29.F.1 rezultă $m(\widehat{DAE}) = 90^\circ - 2\alpha$, astfel că $m(\widehat{AED}) = 2\alpha$. Din $\triangle dr. ADE$ se obține $AE = a/\sin 2\alpha$, $DE = a/\tg 2\alpha$. Din $\triangle dr. ABF$ se obține $AF = a/\cos \alpha$ și $BF = a \cdot \tg \alpha$. Deci

$$\frac{DE+BF}{AE} = \left(\frac{a}{\tg 2\alpha} + a \tg \alpha \right) : \frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + \tg \alpha \cdot \tg 2\alpha}{\tg 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha = 1.$$

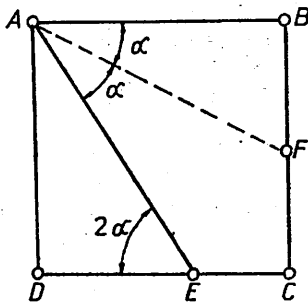


Fig. I.29.F.1

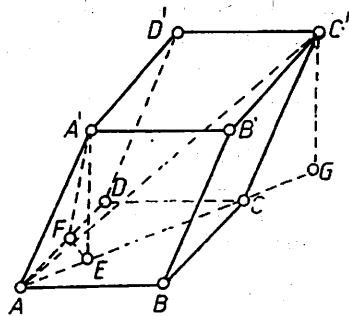


Fig. I.29.F.2

2. Ducem $A'E \perp (ABOD)$ și $EF \perp AD$ (fig. I.29.F.2). Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă $A'F \perp AD$. Din $\triangle dr. A'FA$ rezultă $AF = a/2$ și $A'F = a\sqrt{3}/2$. Datorită simetriei figurii, $E \in AC$ și atunci din $\triangle dr. AFE$ cu $m(\widehat{EAF}) = 30^\circ$ se obține $EF = AF \cdot \tg 30^\circ = a\sqrt{3}/6$ și $AE = EF/\cos 30^\circ = a\sqrt{3}/3$. În continuare, din $\triangle dr. A'EF$ se obține $A'E = \sqrt{A'F^2 - EF^2} = a\sqrt{6}/3$. Lungimea diagonalei AO' se calculează din $\triangle dr. AGO'$, în care $O'G = A'E = a\sqrt{6}/3$ și $AG = AO + OG = AO + AE = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ} + a\sqrt{3}/3 = 4a\sqrt{3}/3$. Se obține $AO' = a\sqrt{6}$.

II. SUBIECTE de examen propuse 67-86

Indicații și răspunsuri 87-117

II.1.*A. Se dă ecuația $(m-2)x^2 - (3m+2)x + m+1 = 0$, cu m un parametru.

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca rădăcinile ecuației să fie reale și distincte.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că rădăcinile ecuației satisfac relația $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$ ($x_1 \neq x_2$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).

*B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$(100x)^{\lg x^2 - 3 \lg x} = 10.$$

C. În triunghiul ABC bisectoarea interioară a unghiului C intersectează pe AB în D , iar paralela prin D la BC intersectează pe AC în E .

Să se determine perimetrul triunghiului ADE în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC .

*D. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4.$$

E. Într-un con se înscrie un cilindru a cărui înălțime este egală cu raza R a bazei conului. Generatoarea conului face unghiul x cu planul bazei.

1. Să se afle raza bazei conului mic format.

2. Să se determine unghiul x astfel ca raportul volumelor celor două conuri să fie $[(3 - \sqrt{3})/3]^3$.

II. 2 *A. Se dă ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Fără a rezolva ecuația, să se calculeze $1/x_1 - 1/x_2 - 2$.

*B. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel ca expresia

$$E(x) = \log_{x-4}(-x^2 + 9x - 8),$$

să fie definită (să aibă sens).

*C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin^2 a \cdot x^2 - x + \cos^2 a = 0$ cu $a \in \mathbb{R}$ și apoi să se determine a pentru care $x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$.

D. Se dă un cerc cu raza de lungime R , căruia i se circumscrie un triunghi isoscel ABC (cu baza AB). Dacă O este centrul cercului, M piciorul perpendicularei dusă din O pe BC , iar N piciorul înălțimii triunghiului, dusă din C , să se arate că:

1. Triunghiurile CNB și COM sînt asemenea.

2. Patrulaterul $BMON$ este inscriptibil.

3. Considerînd $BN = x$, să se determine în funcție de R și x volumul și ariile laterală și totală ale conului generat prin rotirea triunghiului ABC în jurul dreptei CN .

II.3. *A. Să se arate că expresia $E = \sqrt{33 + 10\sqrt{2} + 12\sqrt{5} + 6\sqrt{10}}$ se poate pune sub formă de sumă de rădăcini pătrate a patru numere întregi pozitive.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$\times 1. 9^{x+1} + 9^{-x+1} - 2(3^{x+1} + 3^{-x+1}) - 62 = 0.$$

$$\times 2. \cos x - \sin x + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sin 2x.$$

C. Să se arate că, dacă triunghiurile ABC , $A'B'C'$ au $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ și bisectoarea din A în triunghiul ABC este congruentă cu bisectoarea din A' în triunghiul $A'B'C'$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente (bisectoarea triunghiului fiind interpretată ca segment).

D. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CA$, astfel încît $AP \equiv BQ \equiv CR$.

Să se arate că $4 \cdot \sigma[PQR] \geq \sigma[ABC]$.

E. Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare, iar M și N punctele în care bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ și $\widehat{BAD}$ intersectează muchiile BC și respectiv BD . Fie P punctul de intersecție al dreptei BC cu planul mediator al segmentului $[AM]$ și Q punctul de intersecție al dreptei BD cu planul mediator al segmentului $[AN]$. Să se arate că planul (APQ) este tangent sferei circumscrise tetraedrului.

II.4. *A. Se consideră trinomul de gradul doi: $T(x, m) = 5x^2 + 12x + 10 - m(x^2 + 1)$, unde m este un parametru real.

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $T(x, m)$ să fie pătrat perfect.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $T(x, m) < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

*B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$a^{2x} + b^{2x} = (a^2 + b^2) \cdot (ab)^{x-1},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

*C. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} 3^{\cos x} + 3^{1/\cos y} = 10 \\ 3^{\cos x + 1/\cos y} = 9. \end{cases}$$

D. Se dau dreptele paralele a, b, c . Secantele d_1, d_2 , incidente în O , determină pe aceste drepte paralele segmentele $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$. Să se arate că mijloacele acestor segmente se află pe o dreaptă d care trece prin O .

E. Un trunchi de piramidă $[ABCD A'B'C'D']$ are ca baze romburi cu laturile de 8 cm și 6 cm, iar înălțimea este egală cu triplul diagonalei mari a bazei mici. Știind că romburile au câte un unghi de 120° , să se calculeze aria laterală a trunchiului de piramidă și înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

II.5. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\left[\frac{x-3}{2} \right] = \left[\frac{x-2}{3} \right],$$

unde simbolul $[\]$ reprezintă partea întreagă.

* B. Fie x, y, z numere reale astfel încât $x + y + z = 2$ și $xy + yz + zx = 1$. Să se arate că $x, y, z \in [0, 4/3]$.

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 2(\lg x)^2 + (1 - \sqrt{2}) \lg x^2 = 2\sqrt{2}.$$

$$\times 2. \quad \cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi).$$

D. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu laturile $AB = a$ u.l., $BC = b$ u.l. și $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{DAB})$. Să se afle aria paralelogramului în funcție de laturile sale.

E. O piramidă $[VABCD]$ are ca bază romb $ABCD$ cu latura $AB = a$ u.l. și unghiul ascuțit de măsură $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$. Știind că vârful piramidei se proiectează pe planul bazei în centrul O al rombului și că volumul piramidei este $a^3\sqrt{3}/8$ u.v., să se arate că fețele laterale ale piramidei sînt egal înclinate pe planul bazei și să se determine unghiul de înclinare α .

II.6. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \sqrt[4]{20-x} + \sqrt[4]{77+x} = 5.$$

$$\times 2. \quad 2 \sin t = \sin^2 t + \frac{1}{\sin^2 t}.$$

B. Să se determine funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, care satisface condițiile :

$$f(1) = 1$$

$$f(p+q) = f(p) + f(q) + p^2 + 2pq, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

C. Pe o dreaptă se consideră punctele consecutive A, B, C, D astfel ca $AB \equiv BC \equiv CD$. Fie M un punct mobil pe cercul de diametru AD . Să se afle locul geometric al celui de al doilea punct comun cercurilor circumscrise triunghiurilor AMC și BMD .

D. Să se demonstreze că dacă înălțimea unui con circumscris unei sfere este de k ori diametrul sferei ($k > 1$), atunci raportul dintre aria totală a conului și aria sferei este egal cu raportul dintre volumul conului și volumul sferei.

II.7. A. Să se formeze ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini x_1 și x_2 satisfac relațiile :

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1/(1 + a),$$

a fiind un număr real dat, diferit de -1 .

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \sqrt{3 + x\sqrt{x}} + \sqrt{3 - x\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}.$$

$$2. \quad 4^x + 2 \cdot 14^x = 32 \cdot 49^{x-1}.$$

$$\times 3. \quad \arcsin \frac{3x}{5} + \arcsin \frac{4x}{5} = \arcsin x.$$

C. Un trapez are baza mare egală cu a u.l., baza mică egală cu b u.l. și unghiurile alăturate bazei mari egale cu 60° și respectiv 30° . Să se calculeze aria trapezului.

D. Se dă o piramidă triunghiulară $[VABC]$, cu muchia $VA \perp (ABC)$, $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 4$ cm, $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ și măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și (VBC) de 60° . Să se determine volumul și aria laterală a piramidei.

II.8. A. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = -10 \\ \frac{y^3}{x} + xy = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

*1. $25^{2\sin^2 x + 1} + 625^{\cos^2 x} = 3130.$

*2. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$

C. Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA .

1. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

2. Să se calculeze măsura unghiului A al patrulaterului în cazul în care $AB = 2x + 1$, $AD = x^2 - 1$, $BD = x^2 + x + 1$ și $x > 1$.

D. O zonă sferică are aria egală cu 40π cm², raza sferei fiind de 5 cm. Știind că una din bazele zonei se găsește la distanța de 1 cm de centrul sferei, să se determine aria celeilalte baze.

II.9. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\sqrt{x - \frac{13}{4}} + \sqrt{3(y - x)} + \sqrt{2(z - y)} + \sqrt{t - z} = \frac{1}{4}(x + y + z + t).$

2. $\log_2(2^x + 0,2x + 0,2) = 1 - \log_2(x + 5).$

B. Să se rezolve în $(0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$ sistemul

$$\begin{cases} \log_{\sin x} \cos y + \log_{\cos y} \sin x = 2 \\ \log_{\cos x} \cos(x - y) - \log_{\cos(x - y)} \cos x = 0. \end{cases}$$

C. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$, în care $AD \equiv CD \equiv BC \equiv AO$. Să se determine măsura unghiului $\widehat{ABC}$.

D. Piramida $[SABCD]$ are ca bază pătratul $ABCD$ de centru O , iar SO perpendiculară pe planul bazei.

1. Știind că $AB = 3\sqrt{2}$ cm și $SA = 5$ cm, să se calculeze aria laterală și volumul piramidei.

2. Se consideră $M \in SB$. Să se arate că $AC \perp OM$ și apoi să se determine unghiul făcut de OM cu planul pătratului bazei astfel ca aria triunghiului ACM să fie minimă.

3. Să se determine raza sferei înscrisă în piramidă.

II.10. A. Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1} = \frac{(1 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})}{4}.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 9^x \cdot 3.$

*2. $25^{\log_{0,3}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)} = \frac{1}{9}.$

C. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = a$ u.l. și AD înălțime. Fie E punctul de intersecție dintre perpendiculara dusă din D pe latura AB și paralela dusă prin A la BC . Să se determine aria triunghiului ADE .

D. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există egalitatea $\sin^2 A = \sin 2B \cdot \sin 2C$, atunci triunghiul este isoscel.

E. Într-o prismă dreaptă, pătrată $[ABCD A'B'C'D']$ cu latura bazei a , se face o secțiune plană prin diagonală AC a bazei și vârful D' .

Știind că $m(\widehat{AD'C}) = 30^\circ$, să se afle aria secțiunii și aria laterală a prisme.

II.11. A. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât trinomul de gradul doi $mt^2 + 4(m-1)t + m-1$ să fie strict pozitiv, oricare ar fi $t > 0$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\sqrt{6 - \frac{6}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{6}{x^2}}.$

*2. $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin 2x = 1.$

C. Se dă triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 60^\circ$ și $m(\hat{B}) < 60^\circ$. Fie D simetricul lui C față de latura AB , iar E punctul de intersecție al dreptelor AC și BD . Să se arate că dacă $[BF]$, unde $F \in AC$, este bisectoarea unghiului $\widehat{ABE}$, atunci și $[DF]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADE}$.

D. Fie $[VABCD]$ o piramidă patrulateră regulată avînd latura bazei $AB = 4\sqrt{2}$ u.l. și măsura unghiului diedru dintre o față laterală și planul bazei egal cu 60° . Printr-o muchie a bazei se duce un plan (p) care formează cu planul bazei un unghi diedru de măsură 45° . Să se determine aria secțiunii după care planul (p) intersectează piramida și volumul piramidei obținută prin secționarea piramidei date cu planul (p) .

II.12. A. Se consideră ecuația $(2m+1)x^2 - (2m-1)x - 2 = 0$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. Fără a rezolva ecuația, să se determine valorile lui m astfel ca rădăcinile ei să fie mai mici ca 2.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\log_4(\log_3(\log_2(x-1))) = -\frac{1}{2}.$

*2. $1 - \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$

C. Două drepte care pornesc din același punct M sînt tangente la un cerc în punctele A și B . Raza OB se prelungește dincolo de B cu segmentul $BC \equiv OB$. Să se demonstreze că $\widehat{AMC} = 3m(\widehat{BMC})$.

D. Fie $[ABCD A'B'C'D']$ un cub avînd lungimea muchiei egală cu a u.l. Să se determine :

1. Măsura unghiului diedru format de planul $(AB'C)$ cu planul bazei $(ABCD)$.

2. Aria laterală și volumul piramidei $[B'ABC]$.

II.13. A. Fie funcția $f: (-\infty, 0] \rightarrow [3, +\infty)$, definită prin $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$.

Să se demonstreze că f este inversabilă și să se determine funcția inversă.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \frac{6^x + 9^x}{27^x - 12^x} = \frac{1}{(\sqrt{5})^x}.$$

$$\star 2. \quad \arcsin(x - 1) + \arccos x = \arcsin(1 - x).$$

C. În triunghiul ABC o paralelă la BC intersectează laturile AB , respectiv AC , în D , respectiv E . Perpendicularele în D și E pe AB și respectiv pe AC intersectează înălțimea AA' în punctele M și N . Să se arate că $AM/AN = AB^2/AC^2$.

D. Fie $[VABCD]$ o piramidă cu baza un romb avînd $m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$ și lungimea înălțimii $VO = h$ u.l. Din punctul M , mijlocul înălțimii, se duce MN ($N \in VA$) perpendicular pe muchia laterală VA și de lungime a u.l. Să se determine aria totală și volumul piramidei.

II.14. A. Să se afle elementele mulțimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x - 5y + xy = 14\}.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 25^{\log_{0,2}(x+1) + \log_5(x^2-1)} = \frac{1}{9}.$$

$$2. \quad A_x^8 \cdot A_x^3 = A_x^6 \cdot A_x^4.$$

$$\star 3. \quad 1 + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}.$$

C. În triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 45^\circ$, $AB = a$ u.l., $AC = 2\sqrt{2} \cdot a/3$ u.l. Să se arate că $\operatorname{tg} B = 2$.

D. Fie $[ABCD A'B'C'D']$ o prismă oblică care are ca bază rombul $ABCD$ cu latura $AB = a$ u.l. și $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$. Muchiile AA' , BB' , CC' , DD' formează cu planul bazei unghiuri de măsură 60° , iar planul $(AA'C)$ este perpendicular pe planul bazei.

Să se arate că $\sigma[AA'C'C]/\sigma[BB'D'D] = 3/2$ și să se determine aria laterală și volumul prisme în cazul $AA' = a$ u.l.

II.15. A. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{6n} > \frac{3}{5}.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2} = 7 - \sqrt{10} \\ \lg(5x)^2 - \lg(xy)^3 + \lg(2y)^2 = 1. \end{cases}$$

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$\star 1. \quad \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = -3.$$

$$\star 2. \quad 3^{\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 8x} + 9^{\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 8x} = \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}.$$

D. Într-un cerc de diametru AB și de centru O , perpendiculara dusă pe mijlocul razei OA taie cercul în C și D . Dintr-un punct $M \in CD$, cu $CM = x$ u.l., se duc perpendicularele ME și MF pe coardele AC și respectiv BD . Să se exprime suma $ME + MF$ în funcție de raza R a cercului și de distanța x .

E. Se dă o sferă de centru O , cu raza de lungime R , și un con circular drept SAB circumscris sferei și ale cărui generatoare sînt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru CD cu centrul în O_1 . Se consideră conurile SCD și OCD avînd ca baze cercul de diametru CD .

1. Să se afle volumele conurilor SCD și OCD în funcție de R și x , unde $x = m(\widehat{CSO})$.

2. Să se afle x astfel ca suma ariilor laterale ale conurilor SCD și OCD să fie egală cu $\sqrt{2}/4$ din aria sferei.

II.16. A. Să se găsească elementele mulțimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid (2x - 1) \cdot (y + 2) = 3xy\}.$$

B. Fie ecuația $x^2 + 4x + 8 = 0$. Fără a rezolva ecuația să se arate că $x_1^4 = x_2^4 = -64$ și $x_1^2 + x_2^2 = x_1^{4n+2} + x_2^{4n+2} = 0$.

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \log_9(18 \cdot 3^x + 1) = -x \log_{16} 2.$$

$$\star 2. \quad \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 1.$$

D. Fie AO mediana triunghiului dreptunghic BAC , d perpendiculara în A pe AO și B' , C' proiecțiile punctelor B , C pe dreapta d . Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABB' și ACC' se intersectează într-un punct situat pe ipotenuza BC .

E. Se consideră un trunchi de con avînd înălțimea $OO' = 4$ u.l., generatoarea $AD = R + r$ și aria secțiunii axiale $\sigma[ABCD] = 20$ u.a.

Să se determine aria și volumul trunchiului de con.

II.17. A. Să se determine funcția polinomială $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să satisfacă condițiile :

$$f(1) = 1 \tag{1}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y + 1). \tag{2}$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. 3^x \cdot x^3 + 2(3^x - 2^x) \cdot x^2 - 7 \cdot 3^x \cdot x + 4 \cdot x \cdot 2^x - 2(2^x - 2 \cdot 3^x) = 0.$$

$$\times 2. 2 \sin 3x + \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4.$$

C. Se dă un pătrat $ABCD$, avînd lungimea laturii a u.l. Pe latura BC se ia punctul E astfel ca $CE = a/3$ u.l. Fie F punctul de intersecție al dreptelor DE și AB , iar G mijlocul segmentului $[DF]$. Să se afle ariile triunghiurilor DCG și CGF .

D. Se consideră un cilindru de rotație avînd centrele bazelor în O și O' și raza R ; înălțimea cilindrului are lungimea $OO' = R\sqrt{2}$ u.l. Fie A un punct de pe cercul bazei cu centrul în O și B un punct al cercului cu centru în O' , astfel ca unghiul razelor OA și $O'B$ să aibă măsura egală cu 90° .

Să se arate că toate fețele tetraedrului $[OAO'B]$ sînt triunghiuri dreptunghice și să se calculeze $\sigma_i([OAO'B])$.

II.18. A. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. |x^2 - 2x - 3| + 2 \cdot |x - 5| = 3x^2 + 1.$$

$$2. \log_4(68x + 4) - 4 \log_{16}(x + 1) = 1.$$

$$\times 3. \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

B. Se dă unghiul $\widehat{xOy}$ și A, B două puncte situate pe semidreapta $[Ox, (OA < OB)]$, prin care se duc două paralele care taie semidreapta $[Oy$ în C și D . Dreapta dusă prin D , paralelă cu BC , intersectează $[Ox$ în E . Să se arate că OB este medie proporțională între OA și OE .

C. Fie $\text{ctg } x = 3/4$, $x \in (0, \pi/2)$. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

D. Într-un con, a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi de 60° , se înscrie o sferă de rază R .

1. Să se exprime în funcție de R volumul conului și să se arate că aria sferei reprezintă $2/3$ din aria laterală a conului.

2. Să se determine la ce distanță de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferența ariilor secțiunilor de con și sferă să fie egală cu $4/9$ din aria bazei conului.

II.19. A. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow F \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(-m+0,5)x^2 - x - m - 0,5}$:

1. Ce valori poate lua m ?

2. Să se afle în funcție de m codomeniul funcției f .

B. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, să se stabilească egalitatea

$$C_{n+k-1}^k + C_{n+k-1}^{k+1} = C_{n+k}^{k+1}. \quad (1)$$

Folosind (1) să se arate că are loc și egalitatea

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}. \quad (2)$$

C. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D în această ordine, astfel că $AB = 2a$ u.l., $BC = 2b$ u.l., $CD = 2c$ u.l., unde $0 < a < b < c$. Se construiesc cercurile de diametre AB, BC, CD , cu centrele respectiv în O_1, O_2, O_3 . Să se demonstreze proprietatea: condiția necesară și suficientă ca aceste cercuri să admită o tangentă comună este ca b să fie medie geometrică a numerelor a și c .

D. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad x^{\frac{4}{4-\log_3 x}} = \frac{9}{\sqrt{x^2}}.$$

$$*2. \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x.$$

E. Se consideră o sferă (S) de centru O și de rază $R = 3$ u.l. și un con de rotație (C) cu raza bazei a și înălțimea h , circumscris sferei. Să se determine a și h în funcție de R astfel ca secțiunile obținute în (C) și (S) printr-un plan dus prin O , paralel cu planul bazei, să aibă ariile în raportul $25/16$.

II.20. A. Se consideră ecuația $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+2 = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Să se găsească o relație independentă de m între rădăcinile ecuației.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \log_7(\log_5(\sqrt{x+5} + \sqrt{x})) = 0.$$

$$*2. \quad \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2.$$

C. Se consideră triunghiul ABC având lungimile laturilor egale cu a, b, c . Fie AD bisectoarea unghiului BAC cu $D \in BC$. Se construiesc cercurile (C_1) de centru B și rază BD și (C_2) de centru C și rază CD . Să se calculeze lungimile tangentelor AM și AN duse din A la cercurile (C_1) și respectiv (C_2).

D. Se dă triunghiul ABC avind $BC = 3$ u.l., $AC = 2$ u.l. și unghiul C ascuțit. Fie V_1 volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul dreptei BC și V_2 volumul generat prin rotirea triunghiului în jurul unei perpendiculare dusă în vârful C pe latura BC . Să se calculeze V_1 și V_2 și să se deducă măsura unghiului C în ipoteza $V_1/V_2 = \sqrt{3}/4$.

II.21. A. Să se arate că numărul

$$x = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{2}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

este rațional.

B. Să se calculeze modulul și argumentul expresiei

$$E = \frac{(-\sqrt{3} + i)(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$1 + \log_6 \left(6^{3x-1} + \frac{5}{6} \right) = \log_{36} 9 + \log_6 (6^{2x+1} - 4).$$

D. Se consideră triunghiul ABC și D un punct mobil pe latura BC . Fie E intersecția cu latura AB a paralelei dusă prin D la AC și F intersecția cu latura AC a paralelei dusă prin D la AB . Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $[EF]$.

E. Se consideră tetraedrul $[DABC]$, cu $DA = DB = DC = a$ u.l., $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha$ și $m(\widehat{BDC}) = \beta$. Să se afle în funcție de a , α și β distanța de la punctul D la planul (ABC) și volumul tetraedrului; apoi să se deducă distanța de la A la planul (BCD) .

II.22. A. Folosind semnul funcțiilor de gradul întâi și doi, să se rezolve inecuația

$$\frac{(7 - 2x)(x + 2 - |4 - 5x|)}{x^2 - 9} \leq 0.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \frac{3}{4^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{6^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{9^{\frac{1}{x}}},$$

$$2. \quad 4a^2 \sin(x + B) \cdot \sin(x + C) = (b + c)^2 + 2bc,$$

unde B, C sînt măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic BAC , iar a, b, c sînt lungimile ipotenuzei și catetelor triunghiului.

C. Fie o dreaptă d pe care s-au marcat punctele A, O, B , în această ordine. Prin O se duc semidreptele $[Ox, [Oy, [Oz$, astfel ca unghiurile $\widehat{AOx}$, $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ și $\widehat{zOB}$ să fie congruente între ele. Pe $[Oz$ se ia un punct C astfel încît $OA = OC$. Fie D, E punctele de intersecție a dreptei AC cu semidreptele $[Ox, [Oy$. Să se arate că $AD^2 = AC \cdot DE$.

D. Într-un trapez isoscel $ABCD$, un unghi ascuțit are măsura 45° , iar latura oblică AD are aceeași lungime cu baza mică CD , unde $CD = a$ u.l.

Să se afle aria și volumul corpului obținut prin rotația suprafeței trapezoidale $[ABCD]$ în jurul dreptei AB .

II.23. A. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui x astfel ca $f(x) + f(-x) = 6$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 3 \cdot (12^x + 12^{x-1}).$$

$$\times 2. \quad \log_9(72 \cdot 3^x + 1) = -x \cdot \log_{16} 4.$$

$$\star 3. \quad \sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 3x = 2 \cos x + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x.$$

C. Se dă un patrulater convex $ABCD$, cu $AB \equiv CD$. Fie $M \in \text{Int}(ABCD)$. Să se afle locul geometric al punctului M care satisface egalitatea

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

D. Se consideră tetraedrul $[SABC]$ în care $SA = 2a$ u.l., $SB = SC = a\sqrt{3}$ u.l., $AB = AC = a$ u.l., iar unghiul dreptei SA cu planul (ABC) are măsura 45° . Fie M mijlocul muchiei SA , N mijlocul lui BC și D proiecția lui S pe planul (ABC) .

1. Să se arate că $BC \perp MN$, $BC \perp SA$ și $ABCD$ este pătrat.
2. Să se calculeze aria și volumul tetraedrului.

II.24. A. Să se determine mulțimea perechilor de numere reale (x, y) astfel ca $(x - yi)^2 = 3 - 4yi$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 48 \cdot C_{x+6}^{x+2} = A_{x+7}^4.$$

$$2. \quad \log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = \frac{11}{3}.$$

C. Pe semicercul de diametru AB , cu centrul în O și raza R u.l. se consideră un punct oarecare M . Tangenta în M la semicerc intersectează în P și Q tangentele duse în A și B la semicerc. Să se arate că triunghiul POQ este dreptunghic și să se deducă relația $AP \cdot BQ = R^2$.

D. Trei unghiuri pozitive α, β, γ fac împreună 135° . Știind că $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ și că $\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma = 5$, să se determine $\text{tg } \alpha, \text{tg } \beta, \text{tg } \gamma, \sin 2\alpha$ și $\cos 2\gamma$. Ce concluzie se poate trage asupra unghiurilor α, β, γ ?

E. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R u.l. și înălțimea $h = 2R$ u.l. Dacă V este vârful conului și O centrul cercului de bază, să se calculeze raza cercului de intersecție a conului cu sfera de diametru VO .

II.25. A. Să se arate că pentru orice număr întreg, strict pozitiv, n , are loc inegalitatea

$$\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n.$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile :

$$1. \quad x^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1.$$

$$2. \quad 3 \sin x > 2 \cos^2 x.$$

C. În triunghiul dreptunghic BAC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) se cunosc lungimile catetelor $AB = 6$ u.l., $AC = 8$ u.l. Fie $M \in (AB)$. Paralela dusă prin M la BC intersectează latura AC în N , iar dreptele BN și CM se intersectează în P .

1. Să se determine locul geometric al punctului P când M descrie segmentul (AB) .

2. În ipoteza că $m(\widehat{BPC}) = 135^\circ$, să se calculeze distanța de la A la dreapta MN .

× D. O piramidă patrulateră regulată are muchiile laterale de lungime a u.l. și înălțimea de lungime h u.l.

1. Dacă α este măsura unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate și β măsura unghiului pe care muchiile laterale îl formează cu laturile bazei, să se arate că $\cos \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = 0$.

2. Fie (p) planul paralel cu planul bazei și care trece prin mijlocul înălțimii piramidei. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de piramidă obținut.

II.26. A. Fie o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow F \subset \mathbb{R}$ pentru care există relația

$$3f(x) - 5f(-x) = 2x^2 + 24x + 4, \quad (1)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se găsească legea funcției f și mulțimea valorilor F .

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$2. \quad \log_8(\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}(\log_3(x^2 - 16)))) = \frac{1}{3}.$$

$$\times 3. \quad \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

C. Laturile unui triunghi sînt în progresie aritmetică cu rația 1, iar aria triunghiului este egală cu $30\sqrt{2}$ u.a. Să se afle laturile și unghiurile triunghiului.

D. Să se calculeze aria laterală și volumul unui trunchi de con știind că raza bazei este egală cu $R\sqrt{3}$ u.l. și că în acest trunchi se poate inscrie o sferă de rază R u.l.

II.27. A. Se consideră funcția $f: E \rightarrow F$, cu $E, F \subset \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sqrt{-x+1} + \sqrt{-x-2}$.

Să se găsească mulțimile E, F și să se studieze monotonia funcției f pe mulțimea E .

× B. Se consideră un triunghi ABC în care există relațiile :

$$b \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = a + c, \quad m(\hat{O}) - m(\hat{A}) = 30^\circ.$$

Să se calculeze :

1. Unghiurile triunghiului.

2. Aria triunghiului pentru $b = 1$ u.l.

C. Să se determine x din expresia $(\sqrt{x}^{\frac{1}{1+\lg x}} + \sqrt[12]{x})^6$, știind că al patrulea termen al dezvoltării sale binomiale este 200.

D. Se dă triunghiul oarecare ABC . Perpendiculara din C pe latura AC întâlnește cercul circumscris triunghiului ABC în D și dreapta AB în E . Să se arate că $BD \perp AE$ și că $BD^2 = BE \cdot AB - DE \cdot DC$.

E. Se consideră o piramidă patrulateră regulată, care se secționează cu un plan paralel cu planul bazei. Să se demonstreze că, condiția necesară și suficientă ca să existe un punct egal depărtat de cele șase fețe ale trunchiului de piramidă format este ca înălțimea trunchiului să fie medie proporțională între laturile bazelor.

II.28. A. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încît să aibă loc propozițiile : $p(x, y) : x + y = 4$, $q(x, y) : x^2 + y^2 = 12$. Să se arate că $p(x, y) \wedge q(x, y)$ implică propoziția $r(x, y) : x^3 + y^3 = 40$.

B. Fie $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ și numerele complexe $z_1 = a + ai$, $z_2 = -a + ai$, $z_3 = -a - ai$, $z_4 = a - ai$.

Să se arate că imaginile acestor numere sînt vîrfurile unui pătrat. Care este lungimea laturii pătratului?

C. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2.
$$\frac{1 + \log_2(6 - x^2)}{\log_2(3x - 2)} = 1.$$

3.
$$\sqrt{2^{x+4}} - \sqrt[4]{0,5^{2-x}} = \frac{3}{2}.$$

*4. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 2\sqrt{3}.$

D. Pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul variabil M . Perpendiculara în M pe AM intersectează dreptele CD și CB în E și respectiv F .

1. Să se arate că $ME \equiv MF$ și $AE \equiv AF$.

2. Să se calculeze laturile triunghiului AME în funcție de lungimea

laturii $AB = a$ u.l. și de măsura unghiului $\widehat{BAM} = \alpha$.

3. În ipoteza $\alpha = 45^\circ$, să se calculeze volumul obținut prin rotirea triunghiului AME în jurul dreptei AB .

II.29. A. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{dacă } x < 1 \\ mx + 3, & \text{dacă } x \geq 1, m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine m astfel ca funcția f să fie injectivă și surjectivă pe $\mathbb{R}$.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele :

× 1.
$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \frac{97}{36} \\ x - y + 2xy = 8. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = \frac{513}{8} \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

C. În triunghiul ABC , AD este înălțime, iar AE mediană (punctul D este situat între punctele B și E). Să se determine laturile și unghiurile triunghiului ABC cunoscînd $AD = a\sqrt{3}$ u.l. și $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{EAC}) = 30^\circ$.

D. Știînd că $\cos(a + b) = 0$, să se arate că $\sin(a + 2b) = \sin a$.

E. Se consideră ecuația $\cos^2(3x - \pi) = 1$.

1. Să se arate că imaginile soluțiilor ecuației sînt vîrfurile unui hexagon regulat $ABCDEF$.

2. Să se determine aria și volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței $[ABCDEF]$ în jurul axei de simetrie care leagă două vîrfuri opuse.

II.30. A. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x| + |-x + 1|}$. Utilizînd relația care există între graficul unei funcții inversabile și graficul funcției inverse respective, să se reprezinte grafic funcția f .

B. Să se rezolve în $(\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, sistemul

$$\begin{cases} 2 \cdot (C_x^y - 1) = \frac{1}{3} \cdot A_{x+1}^y \\ y^{\log_y^2(x-1)} + (x-1)^{\log_y(x-1)} = 2y. \end{cases}$$

C. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se demonstreze proprietatea: Condiția necesară și suficientă ca patrulaterul să fie convex este $AC \cap BD \neq \emptyset$.

D. Fie un triunghi oarecare ABC , iar M și H respectiv mijlocul laturii AB și ortocentrul triunghiului dat. Să se demonstreze relația: $AB^2 = 2 \cdot (CM^2 + HM^2 - HC^2)$.

E. Se dă tetraedrul $[ABCD]$ în care $AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $CD \perp AD$. Se cere:

1. Să se arate că proiecția vîrfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC .

2. În ipoteza că triunghiul ABC este echilateral și are lungimea laturii a , să se arate că muchiile laterale sînt egale și să se calculeze volumul tetraedrului.

II.31. A. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $A, B \subset \mathbb{R}$. Să se arate că:

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. Dacă f este injectivă, atunci $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

B. Să se determine numerele întregi $k \neq -2$, astfel încît rădăcinile ecuației $(k+2)t^2 + (2k-1)t + k-1 = 0$, să fie raționale.

C. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea

$$\cos 2^0 x \cdot \cos 2^1 x \cdot \cos 2^2 x \dots \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \cdot \sin x}.$$

D. Într-un semicerc de diametru AB se înscrie un patrulater $ABCD$. Fie P un punct arbitrar pe latura CD și Q proiecția lui pe AB . Să se arate că $QA \cdot QB - PD \cdot PC = PQ^2$.

E. O prismă oblică $[ABCD A'B'C'D']$ are toate fețele romburi (romboid), avînd lungimea muchiei a u.l. și măsura unghiului dintre două muchii consecutive de 60° . Să se afle aria totală și volumul prisme.

II.32. Între ce limite pot varia numerele reale x și y , în condițiile

$$-2 \leq x + y \leq 2, \quad -4 \leq xy \leq 4?$$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile

$$1. \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{8}\right)^x - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^x = 1.$$

$$2. \quad \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\log_8 x)^2} - \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}.$$

C. Să se discute și să se rezolve ecuația în $\mathbb{R}$

$$2m \cos^2 x + 2 \sin^2 x + m \cos x = 1.$$

D. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii BC . Bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$ și $\widehat{AMC}$ intersectează laturile AB , AC în N , respectiv P . Să se arate că :

1. NP este paralel cu BC .
2. $2 \cdot MQ = NP$, unde Q este punctul de intersecție a dreptelor AM și NP .

E. Fie A , B , C , D patru puncte fixe în spațiu, iar (p_1) și (p_2) două plane paralele ce trec respectiv prin A și B . Se notează cu M și N proiecțiile punctelor C și D respectiv pe (p_1) și (p_2) . Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

II.33. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1.$$

$$2. \quad x^{\log_x(x^2-20)} = \sqrt{5}.$$

B. O comisie de operațiuni militare strategice este compusă din 7 membri. Documentele cu care lucrează această comisie se închid într-un seif. Câte broaște trebuie să aibă acest seif și câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei pentru a nu avea acces la documente decât în cazul cînd trei membri din comisie sînt prezenți?

C. Să se rezolve în $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ecuația $z^4 = i\bar{z}^2$ ($\bar{z}$ fiind conjugatul lui z).

D. Fie ABC un triunghi și D , E , F picioarele înălțimilor. Să se arate că :

1. Triunghiurile AEF , DEC și DBF sînt asemenea cu triunghiul ABC ;
2. Bisectoarele triunghiului DEF (numit „triunghi ortic”) coincid cu înălțimile triunghiului ABC .

E. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , să se arate că $AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

F. Se consideră tetraedrul $[ABCD]$ în care $AB \perp BC$, $AB \perp BD$, $AC = AD = a\sqrt{2}$ u.l., $CD = 2a$ u.l., $\sigma[BCD] = a^2/2$ u.a. Se cere :

1. Măsura unghiului diedru determinat de semiplanele închise limitate de dreapta CD și care conțin punctele A și respectiv B .
2. Volumul tetraedrului și distanța de la punctul B la planul (ACD)

II.34. A. Să se rezolve și să se discute în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{x + \frac{1}{2} + 2\sqrt{2x-3}} + m\sqrt{x + \frac{1}{2} - 2\sqrt{2x-3}} = 2\sqrt{2},$$

unde m este un parametru real.

B. Să se determine toate valorile lui $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, care satisfac egalitatea $z^3 + |z| = 0$ ($|z|$ este modulul numărului complex z).

C. Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a unui triunghi ABC se duce o paralelă la mediana AM , M fiind mijlocul laturii BC . Această paralelă intersectează dreptele AB și AC în punctele E și respectiv F . Să se arate că: $AE/AB = AF/AC$ și $DE + DF = \text{const.}$

D. Să se arate că triunghiul ABC în care $8 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1$ este echilateral.

E. Aria unui tetraedru regulat este $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Se cere:

1. muchia tetraedrului;
2. volumul tetraedrului;
3. raza sferei circumscrise tetraedrului.

II.35. A. Se consideră ecuația $2x^3 + x^2 - (m+1)x - m = 0$, cu m un parametru real. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca toate rădăcinile ecuației să fie mai mici ca 1.

B. Să se arate că valorile polinomului $f = X^{10} - X^7 + X^4 - X + 1$ sint strict pozitive oricare ar fi $X = a$ real.

Ce se poate spune despre rădăcinile polinomului f ?

C. Fie z un număr complex nenul. Să se determine valoarea maximă pentru $|z|$ (modulul numărului z) astfel încît $\left| z + \frac{2}{z} \right| = 2$ și să se precizeze apoi cine este z .

D. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, cu vîrfurile în exterior, triunghiurile ADB , BEC și CFA astfel încît $AD/BD = BE/CE = CF/AF = k$ și $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA})$. Fie M, N, P, Q, R, T respectiv mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CE]$, $[EF]$, $[AC]$, $[CD]$ și $[CF]$. Să se arate că:

1. Triunghiurile MNP , PQT și ABC sint asemenea.
2. Patrulaterul $MPQR$ este paralelogram.

E. Să se rezolve ecuația

$$(1 + m) \cos x \cdot \cos (2x - \alpha) = (1 + m \cos 2x) \cdot \cos (x - \alpha),$$

unde α este un număr real dat, iar m un parametru real ce trebuie precizat.

F. Fie $[ABCD A'B'C'D']$ un cub avînd lungimea muchiei a u.l. Să se calculeze distanțele de la punctele A, B, C', D' la planul dus prin mijloacele muchiilor care pleacă din vîrfurile A .

II.36. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt[4]{25-x} + \sqrt{x-5} = 4.$$

B. Se consideră șirul cu termenul general $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ unde numărul radicalilor suprapuși este n ($n \in \mathbb{N}^*$).
Să se arate că

$$\frac{2 - a_n}{2 - a_{n-1}} > \frac{1}{4}, \quad \forall n \geq 2.$$

C. Fie $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$. Să se determine $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, astfel ca $z^n = z$.

D. Se consideră piramida patrulateră $[OABCD]$ cu baza un dreptunghi ($AB = a$ u.l., $BC = b$ u.l.) și muchia OA perpendiculară pe planul bazei ($OA = h$ u.l.). Se notează cu E și F respectiv mijloacele segmentelor OC și OD .

1. Să se precizeze (demonstrând) ce fel de patrulater este $ABEF$ și să se calculeze aria acestui patrulater.

2. Să se afle aria laterală și volumul piramidei.

II.37. A. Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y) care verifică ecuația $x^2 + xy + y^2 = x + y + 2$.

B. Folosind monotonia funcțiilor exponențială și logaritmică, să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y = \frac{5}{6} \\ \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

C. Fie ABC un triunghi oarecare având toate unghiurile ascuțite. Dacă A' , B' , C' sînt picioarele înălțimilor din vîrfurile A , B , C , iar H ortocentrul și R raza cercului circumscris, să se arate că

$$HA' \cos A + HB' \cos B + HC' \cos C = 6 R \cos A \cos B \cos C.$$

D. Într-un triunghi ABC se cunoaște $\hat{A} = \arccos(7/8)$, $BC = a$ u.l. și $h_a = h_b + h_c$. Să se afle lungimile laturilor AB , AC și aria triunghiului.

E. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată $[ABCD A'B'C'D']$ se cunosc lungimile muchiilor bazelor și a muchiilor laterale, egale respectiv cu 2 cm, 6 cm și 4 cm. Pe muchiile AA' , BB' , CC' se consideră punctele M , N , P astfel că $AM = 1$ cm, $BN = 2$ cm, $CP = 3$ cm.

Să se determine aria triunghiului MNP și volumul trunchiului de piramidă.

II.38. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

$$1. \quad 6\sqrt[3]{2^{\frac{1}{x}}} - 2^{\frac{1}{x}} = 8.$$

$$*2. \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 3x.$$

B. 1. Dacă x, y sint numere reale strict pozitive cu $x > y$, atunci

$$\frac{x^2}{(x-y)y} + \frac{2x}{y} + \frac{x-y}{y} \geq 8. \quad (1)$$

2. Folosind (1) să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}, \quad (2)$$

în care r și R sint respectiv razele cercului înscris și cercului circumscris triunghiului. Când are loc egalitatea?

C. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AB = 9$ cm și $AD = 3$ cm. Pe latura AB se iau punctele E și F astfel ca $AE = EF = FB$. Fie M și N punctele de intersecție cu dreptele DF și respectiv DB a perpendicularelor în E și F pe AB .

1. Să se arate că $m(\widehat{AED}) + m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$.

2. Să se calculeze aria patrulaterului $BMNF$ și valoarea raportului $\sigma[DMN]/\sigma[ABCD]$.

D. Se consideră piramida $[SABCD]$ cu baza $ABCD$ romb de arie 8 cm^2 și $m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$. Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor bazei, înălțimea piramidei SO are lungimea egală cu jumătate din latura bazei.

Să se calculeze aria laterală a piramidei și volumul piramidei patrulateră ce are ca muchii laterale înălțimile fețelor laterale ale piramidei $[SABCD]$.

E. Fie x, y numere reale strict negative astfel ca $7(x+y) = 3(x^3 - y^3)$.

1. Să se arate că $x^2 + y^2 > 7/3$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul

$$\begin{cases} 7(x+y) = 3(x^3 - y^3) \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

II.39. A. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile :

1. $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}.$

2. $[\log_4(2x+7) + 1] \cdot \log_{x+5} 2 = 1.$

*3. $\sin^5 x + \cos^5 x = 1.$

B. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele :

1.
$$\begin{cases} x^4 + 9 = 10(x+y) \\ \sqrt{2x+y} - \sqrt{y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + xy + 1} = \sqrt{x+1} \\ 3^{2x+1} + 3^{y+2} = 10 \cdot 3^{x+2x}. \end{cases}$$

C. 1. În triunghiul ABC medianele BB_1 și CC_1 intilnesc înălțimea AA' în punctele D și E . Să se demonstreze relația $A'D/DA + A'E/EA = 1$.

2. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și I centrul cercului înscris. Să se arate că $2Rr = R^2 - OI^2$.

D. 1. Fie $P = [SABC \dots M]$ o piramidă oarecare în care se află înscrisă o sferă de rază r . Să se deducă relația $r = 3^{\frac{1}{3}}(P)/\sigma_1(P)$.

2. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei a . Fața laterală ce conține ipotenuza este triunghi isoscel și este perpendiculară pe planul bazei, iar celelalte fețe au lungimile înălțimilor egale cu lungimea catetei bazei. Se cere :

- (a) aria totală și volumul piramidei;
- (b) volumul sferei înscrisă în piramidă.

II.40. A.1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile :

$$x-0 < \frac{4x-x^2}{3} \leq 1. \quad (1)$$

$$\frac{3x+7}{6} - \sqrt{3x-2} \geq 0. \quad (2)$$

2. Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se rezolve ecuațiile :

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{8}} 8 \cdot \log_2 \frac{4x-x^2}{3}} = \sqrt{3}; \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{3x+7}{6} + \sqrt{3x-2}} + \sqrt{\frac{3x+7}{6} - \sqrt{3x-2}} = \sqrt{6}. \quad (4)$$

B. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 3 \\ xt + yz = \sqrt{3} \\ x + z = a \end{cases}$$

unde a este cel mai mare număr real posibil, care trebuie precizat, ca sistemul să fie compatibil.

C. Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct oarecare de pe diagonala BD a pătratului. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor DAM și BAM sînt congruente și ortogonale.

D. Să se afle numerele complexe de modul 2, care verifică egalitatea $|z^2 + \bar{z}^2 + 6| = 2$.

E. Se consideră prisma dreaptă $[ABCD A'B'C'D']$ cu baza pătratul $ABCD$ de latură a . Prin virful A se duce un plan (α) care taie suprafața laterală a prisme după un romb cu măsura unghiului ascuțit de 60° . Să se calculeze : aria rombului de secțiune, unghiul diedru format de planul (α) cu planul bazei prisme și distanța de la virful rombului opus lui A la planul bazei prisme.

II.41. A. Să se determine numerele reale $x \in (-1, 0)$ astfel ca

$$4x(2x^2 - 1) = 1.$$

B. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$13(x^3y^2 + x^2 + y^2) = 121(xy^2 + 1).$$

C. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $m(\hat{A}) = m(\hat{O}) = 36^\circ$ și $AB = BC = 1$ cm. Să se calculeze $\cos 36^\circ$, $\cos 108^\circ$ și lungimea laturii AB .

D. Se consideră un triunghi ABC și bisectoarea AD . Prin punctul A se duce o dreaptă (d) perpendiculară pe AD . Fie B' proiecția punctului B pe dreapta (d) și E simetricul lui C față de dreapta (d). Să se arate că :

1. Punctele B , A și E sint coliniare.

2. Perimetrul triunghiului $BB'C$ este mai mare decât perimetrul triunghiului ABC .

E. Se consideră un con circular drept cu unghiul de la virf de 60° . În interiorul conului se găsesc trei sfere egale, de rază $r = 1$ cm, tangente două câte două și toate tangente bazei și suprafeței laterale a conului. Să se afle raza bazei conului.

II.42. A. Fie $\{x\} = t$, cu $t \in (0, 1)$, partea fracționară a lui $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Să se demonstreze proprietatea : condiția necesară și suficientă pentru ca $[x^2] = [x]^2$ este $x \in \left(\frac{t}{2}, \frac{1+t^2}{2t}\right)$, unde simbolul $[]$ reprezintă partea întreagă.

B. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{7x^2 + 28x + 26} - \sqrt{5x^2 + 5x + 10} = \sqrt{5x + 20}.$$

C. Se consideră un triunghi isoscel ABC , cu $m(\hat{A}) = 36^\circ$, înscris într-un cerc și o coardă MN de lungime 3 cm care este împărțită de laturile congruente AB și BC în trei părți prin punctele $E \in AB$, $F \in AC$, astfel ca $ME = EF = FN$ și $AE = CF = BC$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului și raza cercului circumscris.

D. Să se determine numerele complexe z de modul 1, astfel ca $A = \frac{z(-\sqrt{3} + i)}{\bar{z}(-\sqrt{3} - i)}$ să fie cel mai mare număr real posibil.

E. Într-un con, cu unghiul de la virf de 60° , este înscrisă o sferă de rază $r = 1$ cm. Să se afle aria totală și volumul cilindrului înscris în sferă, care are ca bază cercul de tangență dintre sferă și con. Care este raportul dintre volumul cilindrului și volumul conului?

II. Subiecte de examen propuse 67-86

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 87-117

II.1. A.1. Condițiile $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$ conduc la $m \in \mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (-6/5, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Se scrie $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1/2$; înlocuind $x_1 + x_2 = (3m + 2)/(m - 2)$, $x_1 \cdot x_2 = (m + 1)/(m - 2)$; se obține $m_1 = -2 \notin \mathcal{D}$ și $m_2 = -6/13 \in \mathcal{D}$.

B. În condiția $x > 0$, prin logaritmare se obține $(2 \lg x - 3 \lg x)(2 + \lg x) = 1$. Notind $\lg x = t$, ecuația se scrie $t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = -1$ și $x = 1/10$.

C. Din $\widehat{EDC} \equiv \widehat{DCB} \equiv \widehat{DCE}$ rezultă $\triangle DEC$ isoscel, adică $DE = EC$ și folosind $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, se obține $DE = ab/(a + b)$, $AE = b^2/(a + b)$ și $AD = cb/(a + b)$, de unde $2p' = b(a + b + c)/(a + b)$.

D. Înlocuind $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ și notind $4^{\sin^2 x} = y$, $y > 0$, ecuația devine $y^2 - 4y + 4 = 0$; se obține

$$x \in \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

E.1. $r = R(1 - \operatorname{ctg} x)$.

2. $\frac{r}{R} = \left(\frac{H - R}{H} \right)^3$; se obține $x = 60^\circ$.

II.2. A. În ipoteza $a > 0$, $x_2 > x_1$, rezultă $x_2 - x_1 = \sqrt{a} = 1$ și $x_1x_2 = 6$, astfel că $1/x_1 - 1/x_2 - 2 = -11/6$.

B. Condiții de existență: $x - 4 > 0$, $x - 4 \neq 1$ și $-x^2 + 9x - 8 > 0$, de unde $x \in (4, 8) \setminus \{5\}$.

C. $x_1 = 1$, $x_2 = \operatorname{ctg}^2 a$, $\sin a \neq 0$. Relația devine $\operatorname{ctg}^4 a = 9 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 a = 3 \Rightarrow a \in \{\pi/6 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. 3. Din $BN = BM = x$ și $\triangle COM \sim \triangle ONB$ rezultă $CN = 2Rx^2/(x^2 - R^2)$ și $BC = x(x^2 + R^2)/(x^2 - R^2)$; se obține:

$$\sigma_1(C) = \pi \cdot \frac{x^2(x^2 + R^2)}{x^2 - R^2} \text{ u.a.}, \quad \sigma_1(C) = \sigma_1(C) + \pi x^2 \text{ u.a.},$$

$$\sigma_2(C) = \frac{2\pi Rx^4}{3(x^2 - R^2)} \text{ u.v.}$$

II.3. A. Se scrie expresia sub forma $E = \sqrt{(33 + 10\sqrt{2}) + \sqrt{(12\sqrt{5} + 6\sqrt{10})^2}}$ și se folosește formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{209 - 60\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} - 3$; $E = \sqrt{15 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{10 + \sqrt{64}} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{2}$.

B.1. Ecuația se scrie $9(3^x + 1/9^x) - 6(3^x + 1/3^x) - 62 = 0$. Notând $3^x + 1/3^x = t$, $t > 0$, ecuația devine $9t^2 - 6t - 80 = 0$, cu $t_1 = 10/3$, iar $t_2 = -8/3 < 0$ nu convine. Se obține ecuația $3^x + 1/3^x = 10/3$ care se rezolvă făcând notația $3^x = y$, $y > 0$; rezultă $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

$$2. 4(\cos x - \sin x) + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x) + \sqrt{2}(\cos x - \sin x)^2 + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

C. Fie N punctul de intersecție a bisectoarei AM cu paralela dusă din C la AB și N' punctul de intersecție a bisectoarei $A'M'$ cu paralela dusă din C' la $A'B'$; triunghiurile ACN și $A'C'N'$ sînt isoscele. Din $\triangle ABM \sim \triangle NMC$ rezultă $AB/CN = AM/MN$, sau folosind $AC \equiv CN$, putem scrie $AB/(AC + AB) = AM/AN$ (1). Analog, din $\triangle A'B'M' \sim \triangle M'C'N'$ se obține $A'B'/(A'C' + A'B') = A'M'/A'N'$ (2). Folosind $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ și $AM \equiv A'M'$, din (1) și (2) rezultă $AN \equiv A'N'$, adică $\triangle ACN \equiv \triangle A'C'N'$ și $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Altfel, se folosește lungimea bisectoarei $l_a = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bcp(p-a)}$ și

$l'_a = \frac{2}{b'+c'} \cdot \sqrt{b'c'p'(p'-a')}$ cu $b = b'$, $c = c'$ și $l_a = l'_a$. Se obține $a = a'$, astfel că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

D. Din $\triangle APR \equiv \triangle BQR \equiv \triangle CRQ$, rezultă $\triangle PQR$ echilateral. Fie $AB = a$, $PR = b$ și $AP = x$, $x \in (0, a)$. În $\triangle APR$ se aplică teorema cosinusului $b^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x \cdot (a-x) \cos(\pi/3)$ sau $b^2 = 3(x - a/2)^2 + a^2/4$ și deci $b^2 \geq a^2/4$. Dar $\sigma[ABC] = (a^2 \cdot \sin 60^\circ)/2$ și $\sigma[PQR] = (b^2 \cdot \sin 60^\circ)/2$ și folosind $4b^2 \geq a^2$, rezultă $4\sigma[PQR] \geq \sigma[ABC]$.

E. Fie O mijlocul segmentului $[AM]$ (fig. II.3.E). Planul mediator al segmentului $[AM]$ intersectează planul (ABC) după dreapta OP — mediatoarea segmentului $[AM] \subset \subset (ABC)$. Din $\triangle APM$ isoscel și din teorema unghiului exterior aplicată

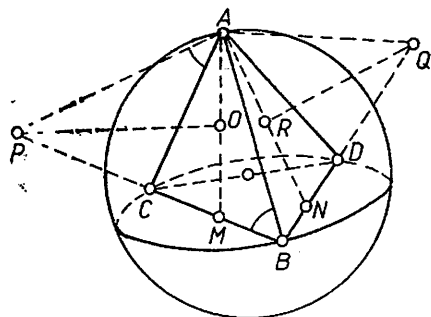


Fig. II.3.E

în $\triangle AMB$ pentru $\widehat{AMP}$, rezultă $m(\widehat{PAC}) + m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{AMP}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{ABM})$. Folosind $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{MAB})$, se obține $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{ABM})$, adică AP este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC și tangentă la sfera circumscrisă tetraedrului $[ABCD]$. Analog se arată că dreapta AQ este

tangentă la sfera circumscrisă tetraedrului $[ABCD]$ și prin urmare planul (APQ) este tangent la sfera circumscrisă tetraedrului $[ABCD]$.

II.4. A.1. $\Delta = 0 \Rightarrow m_1 = 1$, $m_2 = 14$.

2. $5 - m < 0$ și $\Delta = -m^2 + 15m - 14 < 0$, adică $m \in (14, +\infty)$.

B. Se împarte prin $a^x b^x$ și se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$; se obține $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

C. $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, y \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. Se folosește asemănarea triunghiurilor.

E. $\sigma_1(T) = 28\sqrt{974} \text{ cm}^2, VO = h = 72\sqrt{3} \text{ cm}$.

II.5. A. Fie $k = [(x-3)/2]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $k \leq (x-3)/2 < k+1$ și $k \leq (x-2)/3 < k+1$ sau $2k+3 \leq x < 2k+5$ și $3k+2 \leq x < 3k+5$, $k \in \mathbb{Z}$. Se observă că pentru $k=2, 3, 4, \dots$; $3k+2 > 2k+3$ și $3k+5 > 2k+5$ astfel că $3k+2 \leq x < 2k+5 \Rightarrow 3k+2 < 2k+5 \Rightarrow k < 3$. Pentru $k=-1, -2, \dots$ avem $3k+2 < 2k+3$ și $3k+5 < 2k+5$, astfel că $2k+3 \leq x < 3k+5 \Rightarrow 2k+3 < 3k+5 \Rightarrow k > -2$. Prin urmare, ecuația admite soluții pentru $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$; $x \in [1, 2) \cup [3, 7) \cup [8, 9)$.

B. Înlocuind $x+y=2-z$ în a doua egalitate, se obține $z^2 - 2z + 1 - xy = 0$, cu $z \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \geq 0$. Analog $yz \geq 0, zx \geq 0$ adică x, y, z au același semn și anume $x, y, z \geq 0$ (din $x+y+z=2$).

Din $x+y=2-z$ și $xy=(z-1)^2$ se obține ecuația $t^2 - (2-z)t + (z-1)^2 = 0$ care trebuie să admită rădăcini reale pozitive: $\Delta \geq 0, S > 0, P > 0 \Rightarrow z \in [0, 4/3]$.

C.1. $x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = 10\sqrt[3]{2}$.

2. $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\sigma[ABCD] = ab\sqrt{3}/2$ u.a.

E. $VO = 3a/4$ u.l.; se folosește teorema celor trei perpendiculare; $\alpha = 60^\circ$.

II.6. A.1. Din $20-x \geq 0, 77+x \geq 0$ rezultă $x \in [-77, 20]$. Se folosește formula $(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a+b)^2 - 2a^2b^2$ cu $a = \sqrt[4]{20-x}, b = \sqrt[4]{77+x}$; se obține ecuația $t^2 - 50t + 264 = 0$, unde $t = \sqrt{(20-x)(77+x)}$; $t_1 = 44, t_2 = 6$. Folosind valoarea extremă a funcției de gradul doi $(20-x) \cdot (77+x)$, se verifică că $t < 7$. Pentru $t = 6$ se obține $x_1 = -61, x_2 = 4$.

2. $t \in \{(-1)^k \cdot \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

B. Înlocuind $q=1, f(p+1) = f(p) + (p+1)^2$; se obține $f(1) = 1^2, f(2) = 1^2 + 2^2, f(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2$ etc., $f(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

C. Fie N celălalt punct de intersecție a celor două cercuri. $\triangle BNC$ - dreptunghic pentru că $m(\widehat{CBN}) = m(\widehat{NMD}), m(\widehat{BCN}) = m(\widehat{AMN})$ și $m(\widehat{AMN}) + m(\widehat{NMD}) = 90^\circ$. Locul geometric al punctului N este cercul de diametru BC .

D. $g = R(2k-1)\sqrt{k/(k-1)}, R_1 = R\sqrt{k/(k-1)}$.

II.7. A. $(1+a)x^2 - 4x + 4 - a = 0$.

B.1. $x = 2 \in [0, \sqrt[3]{9}]$.

2. Ecuația se scrie $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} + 2\left(\frac{2}{7}\right)^x - \frac{32}{94} = 0$; se obține $x = 1$.

3. Se aplică funcția sinus ambilor membri ai ecuației și se obține :
 $\frac{3x}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{16x^2}{25}} + \frac{4x}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{9x^2}{25}} = x$ sau $x(3\sqrt{25-16x^2} + 4\sqrt{25-9x^2} - 25) = 0$,
 cu $x \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right]$; rezultă $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

C. $(a^2 - b^2)\sqrt{3}/8$ u.a.

D. $\varphi(P) = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$; $\sigma(P) = 2(6 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

II.8. A. Se înlocuiește $y = tx$ și apoi se împart ecuațiile membru cu membru; soluțiile sistemului sînt : $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(2i, i)$, $(-2i, -i)$.

B.1. Se înlocuiește $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ și se notează $625^{\sin^2 x} = t$, $t > 0$; se obține $5t^2 - 625t + 125 = 0$ cu $t_1 = 125$, $t_2 = 1/5$. Rezultă

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^{l+1} \cdot \frac{\pi}{3} + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Se folosește formula $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ și ecuația se scrie
 $(\cos 8x + \cos 2x) + (\cos 6x + \cos 4x) = 0$, sau transformind în produs :
 $2 \cos 5x (\cos 3x + \cos x) = 0 \Rightarrow \cos 5x = 0$, $2 \cos 2x \cdot \cos x = 0$,
 de unde

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2} \mid l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C.1. Se folosește teorema liniei mijlocii a unui triunghi.

2. Se aplică teorema cosinusului; se obține $m(\hat{A}) = 120^\circ$.

D. Fie O centrul sferei, O_1 centrul bazei zonei a cărei arie se cere și O_2 centrul bazei situată la 1 cm față de O . (a) O nu separă O_1 de O_2 , atunci $O_1O_2 = h$ și $O_1O = h + 1$, unde h este înălțimea zonei care se determină din formula ariei zonei. Deci $2\pi \cdot 5 \cdot h = 40\pi$, de unde $h = 4$ cm și $O_1O = 5$ cm. Atunci $r = 0$ și aria bazei zonei este egală cu zero; (b) O separă O_1 de O_2 și $O_1O_2 = h = 4$ cm, iar $O_1O = 3$ cm. Deci $r = 4$ cm și aria bazei zonei este $16\pi \text{ cm}^2$.

II.9. A.1. Se notează $\sqrt{x - 13/4} = a$, $a \geq 0$, $\sqrt{3(y - x)} = b$, $b \geq 0$, $\sqrt{2(z - y)} = c$, $c \geq 0$ și $\sqrt{t - z} = d$, $d \geq 0$, de unde :

$$x = a^2 + \frac{13}{4}, y = \frac{b^2}{3} + a^2 + \frac{13}{4}, z = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{3} + a^2 + \frac{13}{4},$$

$$t = d^2 + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{3} + a^2 + \frac{13}{4}.$$

Ecuația se scrie

$$4a^2 - 4a + 1 + b^2 - 4b + 4 + c^2 - 4c + 4 + d^2 - 4d + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 + (d - 2)^2 = 0,$$

de unde $a = 1/2$, $b = c = d = 2$ și $x = 7/2$, $y = 29/6$, $z = 41/6$, $t = 65/6$.

2. Se impun condițiile $2^x + 0,2x + 0,2 > 0$ (care are loc pentru $x > -2$) și $x + 5 > 0$; ecuația se scrie $(x + 5) \cdot (2^x + 0,2x + 0,2) = 2$. Se constată că $x = -1$ este o soluție a ecuației. Dar pentru $x > -1$,

$x + 5 > 4$, $2^x + 0,2x + 0,2 > 2^{-1}$ și deci $(x + 5) \cdot (2^x + 0,2x + 0,2) > 2$, adică nu există soluții mai mari ca -1 . La fel se arată că nu există soluții mai mici ca -1 .

B. Notăm $\log_{\sin x} \cos y = u$, $\log_{\cos(x-y)} \cos x = v$ și se folosește formula $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; se obține $u = 1$, $v = 1$ (soluția $v = -1$ nu convine pentru că $\cos(x-y) \neq 1/\cos x$, deoarece inversul unui număr pozitiv subunitar este un număr pozitiv supraunitar). Rezultă sistemul $\sin x = \cos y$, $\cos x = \cos(x-y)$, de unde $x + y = \pi/2$, pentru că $x, y \in (0, \pi/2)$ și cum $y \neq 0$, din $\cos x = \cos(-(x-y))$ rezultă $x = -x + y$, adică $2x = y$. Soluția sistemului este $x = \pi/6$, $y = \pi/3$.

C. Se constată că AC este bisectoare și $\triangle AOD \sim \triangle ABC$; se obține

$$m(\widehat{ABC}) = \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 72^\circ.$$

D.1. $\sigma(P) = 6\sqrt{41} \text{ cm}^2$; $\varphi(P) = 24 \text{ cm}^3$.

2. $AC \perp (BOS) \Rightarrow AC \perp OM$ ($\sigma[ACM]_{\min} = (AC \cdot OM/2)_{\min} \Rightarrow OM$ — minim, adică $OM \perp SB$; $m(\widehat{BOM}) = \arccos(4/5)$.

3. $r = (3/8)(\sqrt{41} - 3) \text{ cm}$.

II.10. A. Numitorul se scrie: $\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} + 1)$, apoi se raționalizează numitorul fracției.

B.1. Se împarte ecuația prin $2^x \cdot 3^x$ și se folosește notația $(2/3)^x = t$, $t > 0$, se obține $x = 0$.

2. Se scrie logaritmul în baza 5 și se folosește egalitatea $a^{\log_a u} = u$; se obține ecuația $\sin^2 x + 5 \sin x \cdot \cos x + 5 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0$, deoarece $\cos x \neq 0$. Rezultă $\operatorname{tg} x = -1$ sau $\operatorname{tg} x = -2/3$, adică

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arctg \frac{2}{3} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. $\sigma[ADE] = 3a^2\sqrt{3}/8 \text{ u.a.}$

D. Se înlocuiește $\sin^2 A = (1 - \cos 2A)/2 = [1 - \cos 2(B + C)]/2$.

E. Din triunghiul isoscel $AD'C$ se obține $AD' = a\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $OD' = a\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})/2}$, $\sigma[AD'C] = (a^2/2) \cdot \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \text{ u.a.}$, $\sigma_1(P) = 4a^2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$

II.11. A. Se impun condițiile $m > 0$ și $\Delta < 0$ (1) sau $m > 0$, $\Delta \geq 0$, $S \leq 0$, $P \geq 0$ (2); se obține $m \in [1, +\infty)$.

B.1. Condițiile de existență pentru ecuație sînt: $6 - 6/x^2 \geq 0$, $x^2 - 6/x^2 \geq 0$ și $x^2 - \sqrt{x^2 - 6/x^2} \geq 0$. Prin ridicare la pătrat ecuația devine $2x^2\sqrt{x^2 - 6/x^2} = x^4 + x^2 - 6$ care, prin ridicare din nou la pătrat, dă: $x^8 - 2x^6 - 11x^4 + 12x^2 + 36 = 0$. Notînd $x^2 = t$, $t > 0$, se obține $t^4 - 2t^3 - 11t^2 + 12t + 36 = 0$. Aplicînd schema lui Horner se obțin rădăcinile $t_{1,2} = 3$, $t_3 = -2$, $t_4 = -1/2$. Dar $t > 0$ și deci $x^2 = 3$, de unde $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, soluții care verifică condițiile de existență și ecuația dată.

2. Înlocuind $2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos x$ și $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, ecuația capătă forma $\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{EF}{FA} \quad (1), \quad \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{DB} \quad (2), \quad \frac{BE}{BC} = \frac{AE}{AC}. \quad (3)$$

Se înmulțesc membru cu membru relațiile (2) și (3) și se folosește $BC \equiv BD$; rezultă $\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$ (4). Comparind (1) cu (4) și folosind $AC = AD$, se obține $\frac{DE}{AD} = \frac{EF}{FA}$, adică DF este bisectoare în triunghiul ADE .

Fie $p = (BB_1C_1C)$ și M punctul de intersecție a dreptelor VF și B_1C_1 ; se aplică teorema sinusurilor în $\triangle EMF$ și se obține $EM = 2\sqrt{6}/\sin 75^\circ = 4(3 - \sqrt{3})$ u.l. și $MF = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ u.l. De aici $VM = 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})$ u.l. Din $\triangle VB_1C_1 \sim \triangle VAD$ rezultă $B_1C_1 = VM \cdot AD / VF = 4\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})$ u.l. și atunci $\sigma[BCC_1B_1] = 48\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{3})$ u.a.

Fie $VK \perp (p)$; din triunghiul dreptunghic VKE rezultă $VK = VE \cdot \sin(60^\circ - 45^\circ) = 2(\sqrt{3} - 1)$ u.l. și $\varphi(P) = 32\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 5)$ u.v.

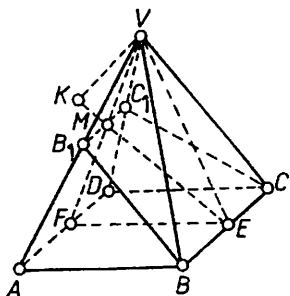


Fig. II.11.D

II.12. A. $\Delta = (2m + 3)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}, x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0$. Deci $x_1 + x_2 - 4 < 0$ și $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$. Înlocuind $x_1 + x_2$ și $x_1 \cdot x_2$ se obține în final $m \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$.

B.1. Condiții de existență $\log_3(\log_2(x-1)) > 0$, adică $\log_2(x-1) > 1$ de unde $x > 3$. Ecuația se scrie sub forma $\log_3(\log_2(x-1)) = 1/\sqrt[4]{4}$ sau $\log_2(x-1) = \sqrt[4]{3}$, de unde $x = 2^{\sqrt[4]{3}} + 1 > 3$.

2. Ecuația este echivalentă cu $2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, de unde

$$x \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. Se unește O cu M . $\triangle AOM \equiv \triangle BOM \equiv \triangle BCM$.

D. 1. $\triangle AB'C$ este echilateral cu $AC = a\sqrt{2}$ u.l.; $\triangle ABC$ este isoscel.

$\widehat{m}(\widehat{AB'C}, \widehat{ABCD}) = \widehat{m}(\widehat{B'OB}, (B'O \perp AC, BO \perp AC))$. Din $\triangle$ dr. $B'BO$ rezultă $\operatorname{tg} \widehat{m}(\widehat{B'OB}) = BB'/OB = 2a/a\sqrt{2}$, de unde $\widehat{m}(\widehat{B'OB}) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2}$.

$$2. \sigma_1(P) = (a^2/2) \cdot (2 + \sqrt{3}) \text{ u.a.}, \varphi(P) = a^3/6 \text{ u.v.}$$

II.13. A. Se arată că f este injectivă și surjectivă și atunci

$$f^{-1}: [3, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], f^{-1}(x) = -\sqrt{(x-3)(x-1)}.$$

B.1. Ecuația se scrie

$$3^x - 2^x = 5^{x/2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^{x/2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{x/2} = 1;$$

se arată că $x = 2$ este soluția unică a ecuației.

2. Ecuația se scrie $\arccos x = 2 \arcsin(1 - x)$ cu $x \in [0, 1]$. Se aplică funcția sinus ambilor membri și se obține ecuația $(1 - x) \cdot (4x^3 - 12x^2 + 7x - 1) = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = (5 - \sqrt{17})/4$, iar soluția $x_4 = (5 + \sqrt{17})/4 \notin [0, 1]$ nu convine.

C. Fie $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = k$, de unde $\frac{AD}{AB} = \frac{k}{1+k}$ și deci $AD = \frac{k}{1+k} \cdot AB$; la fel $AE = \frac{k}{1+k} \cdot AC$. Din $\triangle ADM \sim \triangle AA'B$ se obține $\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AA'}$, de unde $AM = \frac{k}{1+k} \cdot \frac{AB^2}{AA'}$ (1). Analog, din $\triangle AEN \sim \triangle AA'C$ se obține $AN = \frac{k}{1+k} \cdot \frac{AC^2}{AA'}$ (2). Se împarte (1) la (2) și se obține egalitatea cerută.

D. Din $\triangle VMN \sim \triangle VAO$ se obține $AO = \frac{2ah}{\sqrt{h^2 - 4a^2}}$ u.l., iar din triunghiul dreptunghic AOB rezultă

$$AB = \frac{AO}{\cos 15^\circ} = \frac{2ah}{\sqrt{h^2 - 4a^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 4ah \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{h^2 - 4a^2}} \text{ u.l.}$$

Fie VE înălțimea triunghiului VAB . După teorema celor trei perpendiculare rezultă $OE \perp AB$ și atunci din triunghiul dreptunghic AEO

se determină $OE = AO \cdot \sin 15^\circ = ah \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{h^2 - 4a^2}}$ u.l., iar din triunghiul

dreptunghic VOE se obține $VE = h \cdot \sqrt{\frac{h^2 - a^2(2 + \sqrt{3})}{h^2 - 4a^2}}$ u.l.

Deci

$$\sigma(P) = \frac{8ah^2}{h^2 - 4a^2} \cdot (a(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{(2 - \sqrt{3})h^2 - a^2}) \text{ u.a. și}$$

$$\tau(P) = \frac{8a^2h^3(2 - \sqrt{3})}{3(h^2 - 4a^2)} \text{ u.v.}$$

II.14. A. Se scrie relația sub forma $(x - 5)(y + 2) = 4$, de unde $M = \{(6, 2), (7, 0)\}$.

B.1. Domeniul de rezolvabilitate al ecuației este $x > 1$; se scrie $\log_{0.2}(x + 1) = -\log_5(x + 1)$ și se aplică formula $a^{\log_a z} = z$; se obține $x = 4/3$.

2. Pentru ecuație $x \in [8, \infty)$; se obține $x = 9$.

3. În ecuație se înlocuiește $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$;

$$x \in \{(2k + 1)\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi | l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. $\sin B = \frac{2\sigma[ABC]}{AB \cdot BC}$ și $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$ cu $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{9}$ și $\sigma[ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{a^2}{3}$.

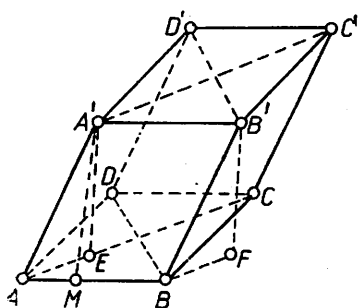


Fig. II.14.D

D. Fie F proiecția lui B' pe planul $(ABCD)$ (fig. II.14.D); atunci $BF \parallel AC$ și deci $BF \perp BD$ și folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă $B'B \perp BD$, adică $BB'D'D$ este dreptunghi. Se duce $A'E \perp AC$, adică $A'E \perp (ABCD)$; $\sigma[AA'C'C] = AC \cdot A'E$ cu $AC = a\sqrt{3}$ și $A'E = AA' \cdot \sin 60^\circ$; $\sigma[BB'D'D] = BD \cdot BB'$ cu $BD = a$ și $BB' = AA'$. Fie M proiecția lui E pe AB ; atunci $A'M \perp AB$ (teorema celor trei perpendiculare); $A'E = a\sqrt{3}/2$ u.l. și $AE = a/2$, $EM = a/4$. Din triunghiul dreptunghic $A'EM$ se determină $A'M = (a/4) \cdot \sqrt{13}$ și deci $\sigma_l(P) = a^2 \sqrt{13}$ u.a., $\varphi(P) = 3a^3/4$ u.v.

II.15. A. Se folosește inducția matematică.

B. Din sistem rezultă $xy > 0$, adică se disting două cazuri: $x > 0$, $y > 0$ și $x < 0$, $y < 0$. Se obțin soluțiile $(-2, -5)$; $(-5, -2)$; $(2, 5)$; $(5, 2)$.

C.1. Se scrie ecuația sub forma $4 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ care, prin împărțire la $\cos^2 x \neq 0$ devine $4 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 1 = 0$, de unde

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \left(-\frac{1}{4} \right) + l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Se introduce notația $3^{\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 8x} = t$ și ecuația devine $t^2 + t - \sqrt{3} - \sqrt[4]{3} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{3}$, iar $t_2 = -1 - \sqrt[4]{3}$ nu convine.

Rezultă $8 \sin^2 4x - 2 \sin 4x - 3 = 0$, de unde

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{1}{4} \arcsin \frac{3}{4} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^{l+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{4} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D. Coarda CD fiind perpendiculară pe mijlocul unei raze este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc, adică $CD = R\sqrt{3}$ și deci $x \in (0, R\sqrt{3})$. Din triunghiurile dreptunghice CEM și DFM se obțin segmentele $ME = x/2$, $DF = (1/2) \cdot (R\sqrt{3} - x)$ și $MF = (1/2) \cdot (3R - x\sqrt{3})$. Deci $ME + MF = (1/2)(3R + x - x\sqrt{3})$.

E.1. Din triunghiurile dreptunghice SCO , SO_1C și CO_1O rezultă $SC = R \operatorname{ctg} x$, $CO_1 = SC \cdot \sin x = R \cdot \cos x$, $SO_1 = SC \cdot \cos x = R \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$ și $OO_1 = R \cdot \sin x$. Deci $\varphi(\operatorname{con}(SCD)) = \frac{\pi R^3 \cos^3 x \cdot \operatorname{ctg} x}{3}$

și $\varphi(\operatorname{con}(OCD)) = \frac{\pi R^3 \sin x \cdot \cos^2 x}{3}$.

2. $\sigma_l(\operatorname{con}(SCD)) = \pi R^2 \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$ și $\sigma_l(\operatorname{con}(OCD)) = \pi R^2 \cdot \cos x$. De aici rezultă ecuația $\cos x(\operatorname{ctg} x + 1) = \sqrt{2}$; se notează $\operatorname{ctg} x = a$, $a > 0$ și ecuația se scrie $[a/\sqrt{1+a^2}] (a+1) = \sqrt{2}$. Ridicînd la pătrat, după efectuarea calculelor, se obține ecuația $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2 = 0$, de unde $a = 1$ și ecuația $a^3 + 3a^2 + 2a + 2 = 0$, care nu mai admite soluții în intervalul $(0, \infty)$. Rezultă $\operatorname{ctg} x = 1$, adică $x = \pi/4$.

II.16. A. Se scrie $4x - y - xy = 2$ sau $(4 - y)(x + 1) = 6$. De aici rezultă $y = 4 - d_i \in \mathbb{N}$ și $x = d_k - 1 \in \mathbb{Z}$, unde $d_i \cdot d_k = 6$. Se obține $M = \{(-7; 5), (-4; 6), (-3; 7), (-2; 10), (5; 3), (2; 2), (1; 1)\}$.

B. Fie $x_k (k = 1, 2)$ rădăcinile ecuației date, adică $x_k^2 + 4x_k + 8 = 0$ sau $x_k^2 = -4x_k - 8$ și prin ridicare la pătrat se obține $x_k^4 = 16x_k^2 + 64x_k + 64 = 16(x_k^2 + 4x_k + 8) - 64 = -64$, iar din $x_1 + x_2 = -4$, $x_1x_2 = 8$, rezultă

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 0, \quad x_1^{4n+2} + x_2^{4n+2} = (x_1^4)^n \cdot x_1^2 + (x_2^4)^n \cdot x_2^2 = (-64)^n \cdot (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

C.1. Ecuația este echivalentă cu $\log_9(18 \cdot 3^x + 1) = -x/4 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^x + 1 = 9^{-x/4}$ de unde, cu notația $\sqrt[4]{3^x} = t$, $t > 0$, se obține ecuația $18t^3 + t - 1 = 0$ cu rădăcina reală $t_1 = 1/3$ și deci $x = -2$.

2. Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{3} = (1 - \cos x)/\sin x$ sau $\operatorname{tg}(x/2) = \sqrt{3}$, de unde $x \in \{2\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Altfel, se înlocuiește $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/3)$ și se aplică formula $\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b)$.

D. Se duce înălțimea AA' a triunghiului ABC ; A' este punctul prin care trec cercurile circumscrise triunghiurilor dreptunghice $AB'B$ și $AC'C$.

E. Fie E proiecția lui D pe AB . Din triunghiul dreptunghic AED rezultă $(R + r)^2 = 16 + AE^2$ cu $R + r = 5$ u.l. Se obține $\sigma_i(T) = 42\pi$ u.a. și $\sigma_v(T) = 28\pi$ u.v.

II.17. A. Înlocuind în (2) $x = 0$, $y = 1$ se obține $f(0) = 0$, adică funcția polinomială nu conține termenul liber. Pentru $y = -x$, (2) conduce la $f(x) + f(-x) = x^2 \Rightarrow f(x)$ este o funcție polinomială de grad ≥ 2 și nu conține termeni în x^{2n} cu $n \geq 2$. Se obține $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x^2 + (1/6)x$.

B.1. Ecuația se scrie $(x - 1)^2 \cdot (3^x(x + 4) - 2 \cdot 2^x) = 0$, de unde $x_{1,2} = 1$ și $(x + 4)/2 = (2/3)^x$, care admite soluția unică $x = -1 \in (-4, +\infty)$ (se folosește monotonia funcțiilor liniară și exponențială).

2. Se înlocuiește $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/3)$, astfel că $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \pi/3)$ și ecuația se scrie $\sin(2x + \pi/6) \cos(x - \pi/6) = 1$. Înlocuind $\sin(2x + \pi/6) = \cos(\pi/2 - 2x - \pi/6) = \cos 2(\pi/6 - x)$ ecuația devine :

$$2 \cos^3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

C. $\sigma[DCG] = a^2/4$ u.a., $\sigma[CGF] = a^2/4$ u.a.

D. $\sigma_i([OAO'B]) = R^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ u.a.

II.18. A.1. $x_1 = -3$, $x_2 = \sqrt{3}$.

2. $x_1 = 0$, $x_2 = 15$.

3. Se înlocuiește

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x;$$

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B. Se aplică teorema lui Thales.

$$C. E = -12/25.$$

$$D.1. \varphi(C) = 3\pi R^3; \sigma_1(C) = 6\pi R^2.$$

2. Fie V vârful conului, VA generatoare, O' centrul bazei conului și $CO' = x$, unde $C \in VO'$, distanța de la baza conului la planul de secțiune. Din asemănarea triunghiurilor VAO' și VDC , cu $D \in VA$, $CD \parallel AO'$, rezultă $DC = (3R - x)/\sqrt{3}$. Se obține ecuația $4x^2 - 12Rx + 5R^2 = 0$ din care rezultă $x = R/2$ ($x = 5R/2 > 2R$ nu convine, deoarece în acest caz planul nu taie sfera).

$$II.19. A.1. m \in (-\infty, -\sqrt{2}/2].$$

$$2. F = \left[\sqrt{\frac{1-2m^2}{2m-1}}, +\infty \right), \text{ pentru } m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

B. Egalitatea (1) se obține folosind formula $C_m^p = m!/p!(m-p)!$, iar (2) rezultă din (1) înlocuind $n = 2, 3, \dots, m$ și adunând membru cu membru egalitățile obținute, ținând seama de egalitatea $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k$.

C. *Necesitatea*: fie d_1 tangenta comună și T_1, T_2, T_3 punctele de tangență și E , respectiv F punctele de intersecție a paralelelor duse din T_1 , respectiv T_2 la dreapta d , cu razele O_2T_2 și O_3T_3 . Se folosește asemănarea triunghiurilor T_1T_2E și T_2T_3F .

Suficiența: din $b^2 = ac$, rezultă $a/b = b/c$ sau $(a+b)/(b+c) = (b-a)/(c-b)$, ceea ce ne spune că $\triangle T_1T_2E \sim \triangle T_2T_3F$ și deci $\widehat{ET_1T_2} \equiv \widehat{FT_2T_3}$, adică punctele de tangență se află pe aceeași dreaptă T_1T_3 .

D.1. Condiții de existență: $x > 0$, $x \neq 1$, $4 - \log_3 x \neq 0$, adică $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \setminus \{81\}$. Ecuația se scrie $x^{\frac{4}{4-\log_3 x} + \frac{2}{3}} = 9$ și se ia logaritmul în baza 3; rezultă $x_1 = 3^{12}$, $x_2 = 3$.

2. Se aduce ecuația la forma $1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = (1/2) \cdot \sin 2x$ sau $\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$, de unde

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

E. Fie S_1 secțiunea în con de rază R_1 și S_2 secțiunea în sferă de rază R ; atunci $R_1 = 15/4$ u.l. Pe de altă parte, folosind asemănarea se obține $15/4 = (h-3) \cdot a/h$ și $3/a = (h-3)/\sqrt{h^2 + a^2}$, de unde $h = 8$ u.l și $a = 6$ u.l.

$$II.20. A. 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 2.$$

B.1. Ecuația se scrie $\log_5(\sqrt{x+5} + \sqrt{x}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$ cu $x \geq 0$. Se obține $x = 4$.

2. În ecuație se înlocuiește $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/3)$; se obține $\sin(x + \pi/3) = 1$, de unde

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. Se aplică teorema bisectoarei la calculul lungimilor segmentelor $[BD]$ și $[DC]$; se obține

$$AM = \frac{2c}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)}, \quad AN = \frac{2b}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)}.$$

D. $\varphi_1 = 4\pi \sin^2 C$ u.v., $\varphi_2 = 2\pi \cdot \sin C \cdot (3 + 2 \cos C)$ u.v. Făcând raportul se obține ecuația $8 \sin C = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \cos C$. Se notează $\operatorname{tg}(C/2) = t$ și ecuația devine $\sqrt{3} \cdot t^2 - 16t + 5\sqrt{3} = 0 \Rightarrow C = 60^\circ$.

II.21. A. Se ridică la cub după formula $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b)$; se obține ecuația $27x^3 + 45x - 38 = 0$; se aplică schema lui Horner; $x = 2/3$.

Altfel, fie

$$\sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{2}{3}}} = a + b \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ și } \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{2}{3}}} = a - b \sqrt{\frac{2}{3}},$$

cu a, b numere raționale. Avem: $19/27 + \sqrt{2/3} = a^3 + 2ab^2 + (3a^2b + (2/3)b^3)\sqrt{2/3}$, de unde rezultă sistemul omogen de gradul 3: $27a^3 + 54ab^2 = 19$, $9a^2b + 2b^3 = 3$, care se rezolvă făcând substituția $b = at$ și împărțind ecuațiile membru cu membru. Se obține ecuația $38t^3 - 162t^2 + 171t - 81 = 0$, de unde $t_1 = 3$ și ecuația $38t^2 - 48t + 27 = 0$, care admite rădăcini complexe conjugate. Rezultă $a = 1/3$, $b = 1$ și

$$\sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{2}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}.$$

B. $|E| = 2 \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $\arg E = 4\pi/3$.

C. Ecuația se scrie $6^{3x} + 5 = 18 \cdot 6^{2x} - 12$ sau, notind $6^x = t$, $t > 0$, rezultă $t^3 - 18t^2 + 17 = 0$, de unde $t_1 = 1$ și $t_2 = (17 + \sqrt{357})/2$ ($t_3 = (17 - \sqrt{357})/2$ nu convine) și $x_1 = 0$, $x_2 = \log_6 t_2$.

D. Locul geometric este linia mijlocie în triunghiul ABC .

E. Fie DO distanța de la punctul D la planul $(ABC) \Rightarrow \triangle AOD \equiv \triangle BOD \equiv \triangle COD$ și O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. De asemenea, $\triangle ADB \equiv \triangle ADC \Rightarrow \triangle ABC$ — isoscel. Fie DE înălțime în $\triangle ADO$, și DF înălțime în $\triangle BDC \Rightarrow O \in AF$. Din $\triangle dr.$ AED avem $AE = a \cdot \sin(\alpha/2) \Rightarrow AC = 2a \sin(\alpha/2)$, din $\triangle dr.$ BFD rezultă $BF = a \cdot \sin(\beta/2)$, iar din $\triangle dr.$ AFC se obține $AF = a \cdot \sqrt{4 \sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\beta/2)}$. Din $\triangle dr.$ $AEO \sim \triangle dr.$ AFC rezultă

$$AO = R = \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}},$$

astfel că

$$DO = a \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}},$$

$$\varphi(T) = \frac{a^3}{3} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Fie $h = d(A, (BCD))$, atunci

$$\varphi(T) = \frac{h}{3} \cdot \sigma[BCD],$$

de unde

$$d(A, (BCD)) = \frac{a}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

II.22. A. $x \in (-\infty, -3) \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right] \cup \left(3, \frac{7}{2}\right]$.

B.1. Se înmulțește ecuația cu $9^{\frac{1}{x}}$ și se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y, y > 0$; se obține $x = -1$.

2. Avem $\sin(x+B) \cdot \sin(x+C) = \sin x \cdot \cos x + bc/a^2$ și ecuația devine $2 \sin 2x = 1$, de unde

$$x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. În $\triangle AOE$ se aplică teorema bisectoarei (OD bisectoare interioară, OC bisectoare exterioară); se obțin rapoartele:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{OA}{OE}, \quad \frac{AC}{EC} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{EC}.$$

Din $\triangle AOD \cong \triangle COE \Rightarrow AD = EC$.

D. $\mathcal{A}(\text{corp}) = 2a^2 \pi \sqrt{2}$ u.a.; $\varphi(\text{corp}) = (\pi a^3/6) \cdot (3 + \sqrt{2})$ u.v.

II.23. A. Pentru $x = 0$ relația nu se verifică; pentru $x \in (-\infty, -1]$ rezultă $-x \in [1, +\infty)$ și ecuația se scrie $-x + 2 + x^2 + 2x + 3 = 6$, de unde $x_1 = (-1 - \sqrt{5})/2 \in (-\infty, -1]$, $x_2 = (-1 + \sqrt{5})/2 \notin (-\infty, -1]$; pentru $x \in (-1, 0)$, $-x \in (0, 1)$ și ecuația este $-x + 4 = 6$, adică $x = -2 \notin (-1, 0)$; pentru $x \in (1, +\infty)$, $-x \in (-\infty, -1)$ și ecuația se scrie $x^2 - x - 1 = 0$, de unde $x'_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \in (1, +\infty)$, $x'_2 = (1 - \sqrt{5})/2 \notin (1, +\infty)$. Prin urmare, egalitatea $f(x) + f(-x) = 6$ are loc pentru $x_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$ și $x'_1 = (1 + \sqrt{5})/2$.

B.1. Ecuația se scrie

$$3^x \cdot (1 + 3 + 9) = \frac{3}{12} \cdot 12^x \cdot (12 + 1) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{12}\right)^x = \frac{3}{12},$$

de unde $x = 1$.

2. Ecuația se scrie $72 \cdot 3^x + 1 = 9^{-\frac{x}{2}}$; se obține $x = -2$.

3. Ecuația se scrie: $4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 2 \cos + \cos^2 x - 1/2$ sau $4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$, de unde

$$x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C. În triunghiurile AMB și DMC se duc medianele ME și respectiv MF . Avem:

$$ME^2 = \frac{1}{2} (MA^2 + MB^2) - \frac{1}{4} AB^2;$$

$$MF^2 = \frac{1}{2} (MC^2 + MD^2) - \frac{1}{4} CD^2.$$

Deoarece $AB = CD$, relația $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ conduce la $ME = MF \Rightarrow$ locul geometric al punctului M este mediatoarea segmentului $[EF]$.

D.1. $SN \perp BC$ și $AN \perp BC$, ca înălțimi în triunghiurile isoscele SBO și ABC (fig. II.23.D). Deci $BC \perp (ASN)$, de unde $BC \perp MN \subset (ASN)$, $BC \perp AS \subset (ASN)$. Fie $SD \perp (ABC)$; atunci din triunghiurile dreptunghice SDA , SDC și SDB se obține $AD = SD = a/\sqrt{2}$ u.l., $CD = BD = a$ u.l. și reciproca teoremei lui Pitagora conduce la faptul că triunghiurile ACD și ABD sînt dreptunghice în C , respectiv B și deci $ABCD$ este pătrat.

2. Din Δ dr. SDN se obține $SN = (a/2)\sqrt{10}$ astfel că $\sigma[SBC] = a^2\sqrt{5}/2$ u.a.; formula lui Heron dă $\sigma[SAB] = \sigma[SAC] = (a^2/2) \cdot \sqrt{3}$ u.a. și deci

$$\sigma_1([SABC]) = (a^2/2) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{3} + 1),$$

$$\sigma_2([SABC]) = a^3\sqrt{2}/6 \text{ u.v.}$$

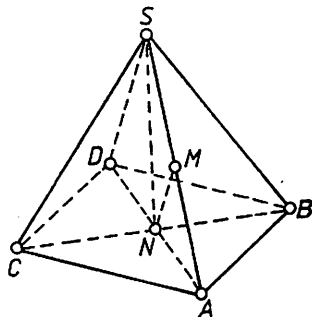


Fig. II.23.D

II.24. A. Se obține sistemul $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2y$, care are soluțiile:

$$(-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0); (2, -1); (2, 1).$$

B.1. Se impun condițiile $x + 2 \geq 0$ și $x + 7 \geq 4$, adică $x \geq -2$; se obține $x = 1$.

2. $x = 4$.

C. $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{MOP}) = (1/2) \cdot m(\widehat{AOM})$ și $m(\widehat{MOQ}) = m(\widehat{BOQ}) = (1/2) \cdot m(\widehat{BOM})$.

Se aplică teorema înălțimii în ΔPOQ .

D. Se obține $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \alpha$ și $\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma = 5 \Rightarrow \lg \alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\sin 2\alpha = 1/2$, $\alpha = 75^\circ$ și $\lg \gamma = 2 - \sqrt{3}$, $\cos 2\gamma = \sqrt{3}/2$,

$\gamma = 15^\circ$ sau $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$, $\sin 2\alpha = 1/2$, $\alpha = 15^\circ$ și $\operatorname{tg} \gamma = 2 + \sqrt{3}$,
 $\cos 2\gamma = -\sqrt{3}/2$, $\gamma = 75^\circ$.

E. Fie AV generatoarea conului, BC diametrul cercului cu centrul în O_2 de intersecție a conului cu sfera, $B \in AV$ și O_1 centrul sferei; atunci $AV = R\sqrt{5}$ u.l. Din $\triangle VBO \sim \triangle VAO \Rightarrow BO/R = 2R/R\sqrt{5} = VB/2R$, de unde $BO = (2\sqrt{5}/5)R$ u.l. și $VB = (4\sqrt{5}/5) \cdot R$ u.l., iar din $\triangle VBO \sim \triangle VBO_2 \Rightarrow BO/BO_2 = VO/VB \Rightarrow BO_2 = r = (4/5) \cdot R$ u.l.

II.25. A. Avem $10 \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 3$ cu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + \dots$
 $\dots > 2 \Rightarrow \lg 2^{10} > 3$ deoarece $2^{10} = 1024 > 10^3$.

B.1. Se impun următoarele condiții de existență $x > 0$, $x \neq 1$ și se deosebesc cazurile: $x \in (0, 1)$, inecuația se reduce la $\log_4(x+2) - \log_2 x > 0$ care este adevărată oricare ar fi $x \in (0, 1)$; $x > 1$, inecuația se scrie $\log_4(x+2) - \log_2 x < 0$, care are loc $\forall x \in (2, +\infty)$. Deci $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

2. Inecuația este echivalentă cu $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 > 0$, de unde prin substituția $\sin x = t$, $t \in [-1, 1]$, se obține $2t^2 + 3t - 2 > 0$ care are loc pentru $\forall t \in \{(-\infty, -2) \cup (1/2, +\infty)\} \cap [-1, 1]$, adică $t \in [1/2, 1]$. Deci $\sin x \leq 1$, $\sin x > 1/2$. Acest sistem este verificat de

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

C.1. Se duce prin P o paralelă la BC care intersectează laturile AB , AC în M' și respectiv N' și se arată că $M'P = N'P$, de unde rezultă că P se află pe mediana triunghiului ABC .

2. Fie h_1 distanța de la punctul A la dreapta MN , $h = 4,8$ u.l. înălțimea triunghiului ABC . $\sigma[BMCN] = BN \cdot CM \cdot \sin 135^\circ/2 = \sigma[ABC] - \sigma[AMN]$ (1). Din $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ rezultă $AM = (h_1/h) \cdot AB$, $AN = (h_1/h) \cdot AC$ și $\sigma[AMN] = (h_1^2/h^2) \cdot \sigma[ABC] = 24 \cdot h_1^2/h^2$ u.a. Din triunghiurile dreptunghice ABN și ACM se obține $BN = (2/h) \cdot \sqrt{9h^2 + 16h_1^2}$, $CM = (2/h) \cdot \sqrt{16h^2 + 9h_1^2}$. Înlocuind în (1), rezultă ecuația:

$$(4/2h^2) \cdot \sqrt{(9h^2 + 16h_1^2)(16h^2 + 9h_1^2)} \cdot \sin 135^\circ = 24 - 24h_1^2/h^2,$$

de unde $h_1 \simeq 1,92$ u.l.

D.1. Fie piramida $[VABCD]$ cu înălțimea VO și $AE \perp VD$, $AE \subset (VAD)$, $CE \perp VD$, $CE \subset (VDC)$. Atunci $\alpha = m(\widehat{AEC})$, $\beta = m(\widehat{ADV}) = m(\widehat{VDC})$ și din triunghiurile dreptunghice VOE și CEO rezultă $OC = \sqrt{a^2 - h^2}$, adică $DC = \sqrt{2(a^2 - h^2)}$ și $CE = \sqrt{2(a^2 - h^2)} \cdot \sin \beta$. Teorema cosinusului aplicată triunghiului AEC conduce la $\cos \alpha = (AE^2 + EC^2 - AC^2)/2AE \cdot EC$, care după înlocuire conduce la relația dată.

2. Fie $[ABCD A'B'C'D']$ trunchiul de piramidă cu înălțimea $OO' = h/2$ și fie VF înălțimea feței VBC și F' punctul de intersecție a dreptelor $B'C'$ și VF . Din triunghiul dreptunghic VOF rezultă $VF^2 = h^2 + (1/4) \cdot 2(a^2 - h^2)$, de unde $VF = \sqrt{(a^2 + h^2)/2}$ și $F'F = (1/2) \cdot \sqrt{(a^2 + h^2)/2}$, $A'B' = (1/2) \cdot \sqrt{2(a^2 - h^2)}$. Deci $\sigma_1(T) = (3/2) \cdot \sqrt{a^4 - h^4}$ și $\sigma_2(T) = 7(a^2 - h^2) \cdot h/12$.

II.26. A. Pentru $-x \in \mathbb{R}$, relația (1) se scrie $3f(-x) - 5f(x) = 2x^2 - 24x + 4$ (2). Se înmulțește (2) cu 5 și (1) cu 3 și prin adunare se obține $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. Se observă că f admite valoarea maximă pentru $x = 3/2$ și $f(3/2) = 1/4$, iar $F = (-\infty, 1/4]$.

B.1. Se împarte ecuația prin $4^{\frac{1}{x}} \neq 0$ și se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y$; se obține $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

2. Se impune o primă condiție $x^2 - 16 > 0$, $\Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ și se folosește definiția logaritmului. Rezultă $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

3. Se înlocuiește $(1 + \cos x)/2 = \cos^2(x/2)$ și se obține ecuația $\sin x \cdot \cos(x/2) = |\cos(x/2)|$ care admite mulțimea soluțiilor

$$M = \{\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(-1)^m \cdot \frac{\pi}{2} + m\pi | m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

C. Fie $a = b - 1$, $b, c = b + 1$. Formula lui Heron dă $\sqrt{(3b/2) \cdot \sqrt{((b+2)/2) \cdot (b/2) \cdot (b-2)/2}} = 30\sqrt{2}$. Se obține $a = 9$, $b = 10$, $c = 11$, $R = 33\sqrt{2}/8$ și se folosește teorema sinusurilor.

D. $g = R\sqrt{3} + r$, $g^2 = 4R^2 + (R\sqrt{3} - r)^2 \Rightarrow r = R\sqrt{3}/3$, $g = (4\sqrt{3}/3)R$,

$$\sigma_i(T) = \frac{16\pi R^2}{3}, \quad \varphi(T) = \frac{26\pi}{9} \cdot R^3.$$

II.27. A. $E = (-\infty, -2]$, $F = [\sqrt{3}, +\infty)$. Fie $x_1, x_2 \in E = (-\infty, -2]$ cu $x_1 < x_2$, atunci $-x_1 > -x_2$ și deci $\sqrt{-x_1 + 1} > \sqrt{-x_2 + 1}$ și $\sqrt{-x_1 - 2} > \sqrt{-x_2 - 2}$, de unde $\sqrt{-x_1 + 1} + \sqrt{-x_1 - 2} > \sqrt{-x_2 + 1} + \sqrt{-x_2 - 2}$, adică $f(x_1) > f(x_2)$ oricare ar fi $x_1 < x_2$, cu $x_1, x_2 \in E$, ceea ce arată că f este strict descrescătoare pe E .

B.1. Se folosește teorema sinusurilor:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a + c}{\sin A + \sin C} \text{ și } \cos \frac{30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Se obține $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$.

2. Din $R = b/2 \sin B$ și $\sigma[ABC] = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ se obține $\sigma[ABC] = (3 + \sqrt{3})/12$ u.a.

C. $T_4 = 200 \Rightarrow x^{\frac{3}{2(1+\lg x)} + \frac{1}{4}} = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2(1+\lg x)} + \frac{1}{4}\right) \cdot \lg x = 1 \Rightarrow \lg^2 x + 3 \lg x - 4 = 0$, de unde $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-4}$.

D. $\triangle ACD$ — dreptunghic $\Rightarrow AD$ — diametru $\Rightarrow BD \perp AE$. Se folosește puterea punctului exterior E față de cerc și teorema lui Pitagora, în $\triangle BDE$.

E. Fie $[VABCD]$ — piramida, $[ABCD A'B'C'D']$ — trunchiul de piramidă, VO — înălțimea piramidei, OO' — înălțimea trunchiului, VE — apotema piramidei, EE' — apotema trunchiului, unde $VE \perp BC$ și O'' mijlocul înălțimii trunchiului din care se duce perpendiculara pe una din fețele trunchiului, de exemplu $O''M \perp (VBC)$, cu $M \in VE$.

Necesitatea. Se presupune $O'O^2 = AB \cdot A'B'$ și se arată că $O''M = (1/2) \cdot OO'$. Pentru aceasta se duce din O'' paralela la OE și se notează cu N punctul de intersecție cu VE . Fie F proiecția lui E' pe OE . Din $\triangle dr.$ $EF E'$ și $O'O^2 = AB \cdot A'B' = 4 OE \cdot O'E'$, rezultă $E'E = OE + O'E'$. Pe de altă parte $\triangle O''MN \sim \triangle EF E'$ și $O''N$ linie mijlocie în trapezul $OE E' O'$.

Suficiența. Se presupune $O''M = O'O/2$ și se arată că $OO' = \sqrt{AB \cdot A'B'}$. În acest caz punctele O, M, O' se găsesc pe cercul de centru O'' și rază $O''M$ și $OE = EM, O'E' = E'M$ (tangente la cerc), de unde $E'E = OE + O'E' + O'E'$. Din $\triangle dr.$ $E'FE$ se obține rezultatul căutat.

II.28. A. $x + y = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 16$ și folosind propoziția $q(x, y)$ se obține $xy = 2$. Dar $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 40$ și deci $p(x, y) \wedge q(x, y) \Rightarrow r(x, y)$.

B. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = a\sqrt{2}$ și $\arg z_1 = \pi/4, \arg z_2 = 3\pi/4, \arg z_3 = 5\pi/4, \arg z_4 = 7\pi/4$. Latura pătratului este $2a$ u.l.

C.1. Ecuația se rezolvă în condiția $x \geq 6$; se obține $x = 8$.

2. Pentru $x \in (2/3, 1) \cup (1, \sqrt{6})$ ecuația se scrie $\log_2(12 - 2x^2) = \log_2(3x - 2)$, sau $2x^2 + 3x - 14 = 0$, de unde $x_1 = 2 \in (1, \sqrt{6}), x_2 = -7/2 \notin (2/3, 1) \cup (1, \sqrt{6})$.

3. Ecuația se scrie $2^{\frac{x+4}{2}} - 2^{\frac{x-2}{4}} = 3/2$. Se obține $x = -2$.

4. Notînd $\operatorname{tg} x = y, y \in \mathbb{R}$, ecuația devine $y^3 - 2\sqrt{3}y^2 + y + 2\sqrt{3} = 0$. Schema lui Horner conduce la $y_1 = \sqrt{3}$ și $y^2 - \sqrt{3}y - 2 = 0$, adică $y_{2,3} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{11})/2$. Se obține

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k_1\pi \mid k_1 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2} + k_2\pi \mid k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \arctg \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2} + k_3\pi \mid k_3 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

D.1. Din $ADEM$ inscriptibil, se obține $m(\widehat{EAM}) = m(\widehat{EDM}) = 45^\circ$, astfel că $\triangle dr.$ AME este isoscel $\Rightarrow AM = EM$. Din $\triangle ADM \equiv \triangle CDM$ se obține $AM = CM = ME$ și atunci în $\triangle dr.$ ECF , CM mediană $\Rightarrow EM = MF$. $\triangle EAF$ este dreptunghic isoscel (AM mediană și înălțime și $m(\widehat{EAF}) = 90^\circ$).

2. Se aplică teorema sinusurilor în $\triangle AMB$:

$$\frac{AM}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sin(135^\circ - \alpha)} \Rightarrow AM = EM = \frac{a}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

3. Pentru $\alpha = 45^\circ$, AE coincide cu AD și $\varphi_{\text{corp}} = \varphi_{\text{tr.con}} - \varphi_{\text{con}} = (\pi h/3)(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 h/3 = (\pi h R/3)(R + r)$, unde $h = a/2, R = a, r = a/2$ și deci $\varphi = \pi a^3/4$.

I.29. A. $m = -2$.

B.1. Sistemul este echivalent cu sistemele $x - y = -2$, $xy = 5$ (1a)
 $x - y = 2$, $xy = 3$ (1b).

2. Sistemul cu notația $y^3 = t$, conduce la ecuația $8t^2 - 513t + 64 = 0$, de unde $x_1 = 4$, $y_1 = 1/2$; $x_2 = 1/2$, $y_2 = 4$.

C. $AB = 2a$ u.l. Notăm $m(\widehat{ACE}) = x$, $m(\widehat{EAD}) = y$; din $\triangle$ dr. ADC rezultă $x + y = 60^\circ$ (1), iar din $\triangle$ dr. ADE se obține $DE = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} y$. Dar $CE = EB = ED + DB$, adică $BC = 2(a\sqrt{3} \operatorname{tg} y + a)$ (2) și $BC = BD + DC = a + a\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} x$ (3). Din (1), (2) și (3) rezultă ecuația $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg} y = 0$. Se obține $y = 30^\circ$, $x = 30^\circ$, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $BC = 4a =$ u.l. și $AC = 2a\sqrt{3}$ u.l.

Altfel, se aplică teorema sinusurilor în $\triangle ACE$ și $\triangle BAE$:

$$\frac{CE}{\sin 30^\circ} = \frac{AE}{\sin x}, \quad \frac{AE}{\sin 60^\circ} = \frac{BE}{\sin (30^\circ + y)},$$

de unde se obține ecuația $4 \sin(30^\circ + y) \cdot \sin x = \sqrt{3}$ (4). Se rezolvă apoi sistemul format din ecuațiile (1) și (4).

D. Se înmulțește $\cos(a + b) = 0$ cu $2 \sin b$.

$$\text{E.1. } x \in \left\{ (k+1) \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pe cercul trigonometric aceste soluții dau vîrfurile hexagonului regulat $ABCDEF$.

2. Corpul de rotație este un cilindru prevăzut la capete cu două conuri. $\sigma_{\text{corp}} = 4\pi Rg$, unde $g = 1$ u.l., $R = \sqrt{3}/2$ u.l. și $\varphi_{\text{corp}} = \pi R^2 h_1 + \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot h_2/3$, unde $h_1 = 1$ u.l., $h_2 = 1/2$ u.l.

II.30. A.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-2x}, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \\ \sqrt{2x-1}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Se consideră funcțiile $h: (-\infty, 0) \rightarrow (1, +\infty)$, $h(x) = \sqrt{1-2x}$ și $g: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Se arată că h și g sînt bijective și deci există:

$$h^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0), \quad h^{-1}(x) = \frac{-x^2 + 1}{2},$$

$$g^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty), \quad g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Se trasează punctat graficele funcțiilor h^{-1} și g^{-1} , iar cu linie plină simetricele lor față de prima bisectoare, la care se adaugă graficul funcției $e: [0, 1] \rightarrow \{1\}$, $e(x) = 1$. Graficul funcției fete reuniunea graficelor funcțiilor h , e , g .

B. Fie $t = y^{\log_y^2(x-1)}$ cu $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Prin logaritmare în baza $x-1$ se obține $\log_{x-1} t = \log_y^2(x-1) \cdot \log_{x-1} y \Leftrightarrow \log_{x-1} t = \log_y(x-1)$, adică $t = (x-1)^{\log_y(x-1)}$ și ecuația a doua a sistemului conduce la $t=y$, adică $x-1 = y$ ($x-1 = 1/y \notin \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, pentru $y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$). Înlocuind în prima ecuație, se obține $12(x-1) = (x+1)! \Leftrightarrow (x-2)! = 12/x \cdot (x+1) \in \mathbb{N}^*$, dacă și numai dacă x și $x+1$ sînt divizori consecutivi ai lui 12. Rezultă $x=3$ și $y=2$.

C. *Necesitatea.* $ABCD$ convex înseamnă că $A \in \text{Int. } \widehat{BCD}$ și din $B \in CB$ și $D \in CD$, după teorema transversalei rezultă $CA \cap BD \neq \emptyset$ (1). Analog, din $C \in \text{Int. } \widehat{BAD}$ și din $B \in AB$, $D \in AD$, rezultă $AC \cap DB \neq \emptyset$ (2). Din (1) și (2) rezultă $AC \cap BD \neq \emptyset$.

Suficiența: relația $AC \cap BD \neq \emptyset$ conduce la existența unui punct O astfel încît $AC \cap BD = \{O\}$. Prin urmare, dreapta AC taie segmentul BD într-un punct O și după axioma de separare a planului rezultă că B și D se află în semiplane diferite determinate de AC . Analog, A și C sînt situate în semiplane diferite determinate de dreapta BD . Din $BO \cap DC = \emptyset$ și $AO \cap DC = \emptyset$, rezultă că punctele A, O, B se găsesc de aceeași parte a dreptei DC . Analog se arată că punctele A, O, D se găsesc de aceeași parte a dreptei BC , iar punctele D, O, C se găsesc de aceeași parte a dreptei AB . De aici rezultă că patrulaterul $ABCD$ este convex în baza uneia din definițiile patrulaterului convex.

D. Teorema cosinusului aplicată în $\triangle BCM$, $\triangle AHM$ și $\triangle AHC$ dă:

$$CM^2 = AB^2/4 + BC^2 - AB \cdot BC \cdot \cos B \quad (1), \quad HM^2 = AB^2/4 + AH^2 - AB \cdot AH \cdot \sin B \quad (2), \quad HC^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH \cdot \sin C \quad (3),$$

unde $m(\widehat{HAM}) + m(\widehat{B}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{CAH}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$.

Din relațiile (1), (2), (3), folosind teorema sinusului și teorema cosinusului în $\triangle ABC$, se obține $2(CM^2 + HM^2 - HC^2) = BC^2 - AC^2 + 2AC \cdot AH \cdot \sin C$ (4). Fie B' piciorul înălțimii dusă din B ; avem: $AH \cdot \sin C = AH \cos(\widehat{B'AH}) = AB' = AB \cdot \cos A$ și (4) devine $2(CM^2 + HM^2 - HC^2) = BC^2 - AC^2 + 2AC \cdot AB \cdot \cos A = AB^2$.

E.1. Fie H proiecția lui D pe (ABC) și $MH \perp AB$ ($M \in AB$); după teorema celor trei perpendiculare $DM \perp AB$. Din triunghiurile dreptunghice DMA, DMB rezultă $AM^2 - MB^2 = AD^2 - BD^2$ (1), iar din triunghiurile dreptunghice ADC, BDC rezultă $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ (2). Relațiile (1) și (2) conduc la $AC^2 - AM^2 = BC^2 - MB^2 = CM^2$ (3), adică $CM \perp AB$. La fel se arată că H se află pe înălțimile duse din A și B pe BC și AC și deci H este ortocentrul triunghiului ABC .

$$2. \sigma[ABC] = a^2\sqrt{3}/4, \quad \varphi(T) = a^3\sqrt{2}/24.$$

II.31. A.1. Fie $y \in f(A \cap B)$, cu y oarecare. Există $x \in A \cap B$, astfel ca $y = f(x)$. Dar $x \in A \cap B$ înseamnă $x \in A$ și $x \in B$ și deci $y = f(x) \in f(A)$ și $y = f(x) \in f(B)$, adică $y \in f(A) \cap f(B)$ și prin urmare $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. Fie $z \in f(A) \cap f(B)$, atunci $z \in f(A)$ și $z \in f(B)$. Deci există $a \in A$ astfel ca $z = f(a)$ și există $b \in B$ astfel ca $z = f(b)$. Deci $f(a) = f(b)$. Dar f fiind injectivă, rezultă $a = b$, astfel că oricare ar fi $a = b = x \in A \cap B$

are loc $z = f(x) \in f(A \cap B)$, adică $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ și folosind rezultatul de la punctul 1 rezultă că $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

B. $k \in (-\infty, 9/8) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{-2\})$ și $9 - 8k = m^2$ cu $m \in \mathbb{Z}$, conduce la $k \in \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\} \right\}$ (s-a înlocuit $m = 2n + 1$).

C. Se folosește metoda inducției matematice.

D. Fie E și F punctele în care dreapta PQ taie cercul (E se află ne semicercul în care este înscris patrulaterul). Puterea punctului interior P față de cerc dă $PD \cdot PC = PE \cdot PF$. Dar $PE = QE - PD$, $PF = PQ + QF$, $QE = QF$ și prin înlocuire se obține $PD \cdot PC = QE^2 - PQ^2$. În $\Delta dr. AEB$ se aplică teorema înălțimii: $QE^2 = QA \cdot QB$.

E. $\sigma_1(P) = 3a^2/\sqrt{3}$ u.a. Fie M proiecția lui A' pe $(ABCD)$ și $MN \perp AB$ ($N \in (AB)$), atunci teorema celor trei perpendiculare dă $A'N \perp AB$; se obține $A'N = a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}/2$ u.l., $MN = (a/2) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = a\sqrt{3}/6$ u.l., $A'M = a\sqrt{6}/3$ u.l. și $\varphi(P) = a^3\sqrt{2}/2$ u.v.

II.32. A. Fie $x + y = s \in [-2, 2]$ și $xy = p \in [-4, 4]$; ecuația de gradul doi $t^2 - st + p = 0$ are ca rădăcini numerele x și y care satisfac condițiile impuse. De aici, printr-un raționament de determinare a valorilor maxime și minime pentru x și y , rezultă $x, y \in [-1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$.

B.1. Se elimină numitorul: $8^x + 3^{x+1} - 3^{x+1} \cdot 3^{\frac{x+1}{2}} - 8^x \cdot 3^{x-1} = 0$ sau $8^x(1 - 3^{x+1}) + 3^{x+1} \cdot (1 - 3^{\frac{x+1}{2}}) = 0$, de unde $x = -1$.

2. Cu condiția $x > 0$ se notează $\sqrt[3]{\log_2 x} = t$; rezultă $t^2 - 3t - 4 = 0$; se obține $x_1 = 2^{64}$, $x_2 = 1/2$.

C. Ecuația se scrie $2(m-1)\cos^2 x + m\cos x + 1 = 0$, sau, folosind notația $\cos x = t$, $t \in [-1, 1]$, avem $f(t) = 2(m-1)t^2 + mt + 1 = 0$ (1). Condițiile ca rădăcinile $t_{1,2} \in [-1, 1]$ sînt $\Delta \geq 0$, $-1 \leq -b/2a \leq 1$, $f(-1) \cdot f(1) \geq 0$. Se obține $m \in (-\infty, 1/3] \cup [4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$, caz în care există două valori $t_{1,2} \in [-1, 1]$ și deci $\cos x = t_1$, $\cos x = t_2$. Condițiile ca ecuația (1) să admită o rădăcină în $[-1, 1]$ sînt: $\Delta > 0$, $f(-1) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow m \in (1/3, 1)$. Pentru $m = 1/3$ se obține $\cos x_1 = 1$, $\cos x_2 = -3/4$, adică

$$x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm \arccos(-3/4) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

iar pentru $m = 1$ se obține $\cos x = -1$, deci

$$x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

D.1. Se aplică teorema bisectoarei în triunghiurile AMB și AMC .

2. Triunghiul NMP dreptunghic și MQ mediană.

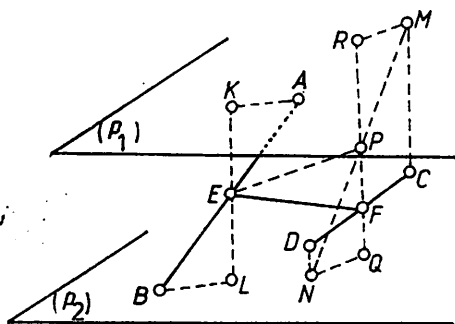


Fig. II.32.E

ralel cu cele două plane p_1, p_2 și $EP \perp PR, EP \perp PQ$. Din $CM \parallel DN$ și $MP = PN, CF = DF$, rezultă $PF \parallel MC$ astfel că $PF \perp EP$ și $\triangle EPF$ este dreptunghic în P . Locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$ (punctul P) este sfera de diametru EF .

II.33. A.1. Domeniul de rezolvabilitate al ecuației este $\mathfrak{D} = [-3, +\infty)$

Ecuația $\sqrt[3]{x+3} = 1 + \sqrt[3]{x+2}$ se ridică la pătrat; se obține $x+2 = 2\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{(x+2)^2}$. Notînd $\sqrt[3]{x+2} = t$, ecuația se scrie: $t^3 - t^2 - 2t = 0$, de unde $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 2$ și deci $x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 6$.

2. Se impun următoarele condiții de existență: $x > 0, x \neq 1$ și $x^2 - 20 > 0$, de unde $x \in (2\sqrt{5}, +\infty)$. Prin logaritmare în baza x se obține $\log_x(x^2 - 20) = \log_x \sqrt{5} \Leftrightarrow (1/2) \log_x(x^2 - 20) = (1/2) \cdot \log_x 5$, de unde $x = 5 \in (2\sqrt{5}, +\infty)$ este soluția ecuației.

B. Pentru orice grup de 2 membri există o broască care nu poate fi deschisă (cheia broaștei se află la un al treilea membru). Numărul de broaște ale seifului este egal cu numărul modurilor în care se pot alcătui din cei 7 membri grupe distincte de câte 2 membri, adică $C_7^2 = 21$ broaște. Dar, pentru fiecare broască sînt necesare trei chei, adică sînt $3 \cdot 21 = 63$ chei. Rezultă că fiecare membru din comisie are $63 : 7 = 9$ chei.

C. *Metoda 1.* Înlocuind $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, cu $|z| \neq 0$ și $\varphi \in [0, 2\pi)$, se obțin soluțiile :

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, z_1 = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12},$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}, z_3 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12},$$

$$z_4 = \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}, z_5 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

Metoda 2. Înlocuind $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, se obține sistemul:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 2xy = 0 \\ 4x^3y - 4xy^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

din care se determină $x^2 + y^2 = 1$ și deci $z^6 = 1$ etc.

D.1. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC . Din $AHEF$ inscripșibil și din triunghiurile dreptunghice AEH și ADC se deduce $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{AHE}) = 90^\circ - m(\widehat{EAH}) = m(\widehat{ACD})$ și deci $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. În același mod rezultă $m(\widehat{BDF}) = m(\widehat{BAC})$ și $\triangle BDF \sim \triangle ABC$; $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{BAC})$ și $\triangle CDE \sim \triangle ABC$.

2. Din $m(\widehat{BDF}) = m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CDE})$ și $AD \perp BC$ rezultă $[DA]$ bisectoarea $\sphericalangle EDF$. Analog $[EB]$ este bisectoarea $\sphericalangle DEF$ și $[FC]$ este bisectoarea $\sphericalangle DFE$, adică bisectoarele triunghiului DEF coincid cu înălțimile triunghiului ABC .

E. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și M, N, P punctele de tangență ($M \in BC, N \in AC, P \in AB$). Din triunghiul dreptunghic API rezultă $\sin(A/2) = PI/AI$, sau $AI = r/\sin(A/2)$. Înlocuind $r = 4R \sin(A/2) \cdot \sin(B/2) \cdot \sin(C/2)$ (vezi I.27. F.1) se obține

$$AI = 4R \sin B/2 \cdot \sin C/2.$$

F.1. $AB \perp (BCD)$. Fie $BE \perp CD$ ($E \in CD$); rezultă $AE \perp CD$. Unghiul diedru definit de semiplanele închise limitate de dreapta CD și care conțin punctele A și respectiv B , are măsura $= m(\widehat{AEB})$. Din $\sigma[BCD] = BE \cdot CD/2$ se obține $BE = a/2$ u.l. Din $\triangle dr. AEC$ se deduce $AE = a$ și atunci $\triangle dr. ABE$ ne dă: $\cos m(\widehat{AEB}) = 1/2$, adică $m(\widehat{AEB}) = 60^\circ$.

2. $AB = a\sqrt{3}/2$ u.l. și $\mathfrak{V}([ABCD]) = a^3\sqrt{3}/12$ u.v. Dar $\mathfrak{V}([ABCD]) = (1/3) \sigma[ACD] \cdot d(B, (ACD))$, de unde $d(B, (ACD)) = a\sqrt{3}/4$ u.l.

II.34. A. În ipoteza $x \in [3/2, +\infty)$, se înmulțește ecuația cu $\sqrt{2}$ și se notează $\sqrt{2x-3} = t, t \geq 0$; se obține ecuația $t + 2 + m \cdot |t-2| = 4$. Deosebim cazurile: (a) $t \in [0, 2)$; ecuația se scrie: $(1-m)t = 2(1-m)$ (1). Pentru $m = 1$ egalitatea (1) este verificată oricare ar fi $t \in [0, 2)$ și ecuația dată admite o infinitate de soluții $x = a \in [3/2, 7/2)$. Pentru $m \neq 1$, din (1) rezultă $t = 2 \notin [0, 2)$ și ecuația nu admite soluții în $[3/2, 7/2)$. (b) $t = 2$, egalitatea (1) este verificată oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ și ecuația dată admite soluția $x = 7/2, \forall m \in \mathbb{R}$. (c) $t \in (2, +\infty)$; ecuația se scrie $(1+m) \cdot t = 2(1+m)$ (2). Pentru $m = -1$ egalitatea (2) este verificată oricare ar fi $t \in (2, +\infty)$ și ecuația admite o infinitate de soluții $x = b \in (7/2, +\infty)$. Pentru $m \neq -1, t = 2 \notin (2, +\infty)$ și ecuația nu admite soluții în $(7/2, +\infty)$.

Observație. Se poate folosi și formula

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \text{ cu } C = \sqrt{A^2 - B}.$$

B. Fie $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ cu $\varphi \in [0, 2\pi)$ și $|z| \neq 0$. Se obține $|z|^2 \cos 3\varphi + 1 = 0$ și $|z|^2 \sin 3\varphi = 0$ sau $\sin 3\varphi = 0$ și $\cos 3\varphi < 0$, de unde $3\varphi = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $\varphi \in [0, 2\pi)$. Se obțin valorile:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad (k=0);$$

$$z_2 = \cos \pi + i \sin \pi \quad (k=1);$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \quad (k=2),$$

sau

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C. Se aplică teorema lui Thales în triunghiurile ABM și CDF :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{MD}{MB} \text{ și } \frac{DM}{MC} = \frac{FA}{AC}, \text{ de unde } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}.$$

Din $\triangle BDE \sim \triangle BAM$ rezultă

$$\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \quad (1),$$

iar din $\triangle CDF \sim \triangle CMA$ rezultă

$$\frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM} \quad (2).$$

Din (1) și (2) se obține $DE + DF = 2AM$.

Observație. Dacă $D \equiv M$ atunci E și F coincid cu A și egalitățile date sînt verificate.

D. Se folosește $2 \cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, $\cos C = -\cos(A+B)$ și $1 = \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B)$, iar egalitatea dată se scrie:

$$[2 \cos(A+B) + \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0,$$

de unde $\sin(A-B) = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$ pentru că $\hat{A}, \hat{B} \in (0^\circ, 180^\circ)$ și $2 \cos(A+B) + \cos(A-B) = 0$ sau $2 \cos C = 1$, de unde $\hat{C} = 60^\circ$.

E.1. Fie l lungimea muchiei tetraedrului regulat. Aria unei fețe este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ și din $4 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$, rezultă $l = 12$ cm.

2. Fie $[ABCD]$ tetraedrul regulat și O centrul bazei $\triangle ABC$. Din $\triangle dr. DOB$, în care $BO = \frac{l}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ cm, se obține înălțimea tetraedrului $DO = \frac{l\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{V}([ABCD]) = 144\sqrt{2}$ cm³.

3. Fie O' centrul sferei circumscrise tetraedrului și D' punctul diametral opus lui D . Din $\triangle dr. DBD'$, în care BO este înălțimea, rezultă $BO^2 = DO \cdot D'O$, de unde $R = 3\sqrt{6}$ cm.

11.35. A. Se obține $x_1 = -1$ și ecuația $f(x) = 2x^2 - x - m = 0$ care trebuie să aibă ambele rădăcini mai mici ca 1; se impun condițiile $\Delta \geq 0$, $-b/2a < 1$, $f(1) > 0$, de unde $m \in [-1/8, 1)$.

B. Se deosebesc cazurile :

1°. $a \leq 0$, $-a \geq 0$, $-a^7 \geq 0$ și deci $f(a) > 0$, $\forall a \in (-\infty, 0]$.

2°. $0 < a < 1$; $f(a) = a^{10} + a^4(1 - a^3) + 1 - a > 0$.

3°. $a \geq 1$; $f(a) = a^7(a^3 - 1) + a(a^3 - 1) + 1 > 0$.

Rădăcinile polinomului sînt toate complexe.

C. Fie $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ cu $\varphi \in [0, 2\pi)$. Avem $|(z^2 + 2)/z| = 2 \Leftrightarrow |z^2 + 2| = 2 \cdot |z|$. Dar $|z^2 + 2| = ||z|^2 \cos 2\varphi + 2 + i|z|^2 \sin 2\varphi| = \sqrt{|z|^4 + 4|z|^2 \cos 2\varphi + 4}$. Se obține ecuația $|z|^4 + 4|z|^2(\cos 2\varphi - 1) + 4 = 0$, cu $|z|^2 = 2(1 - \cos 2\varphi) + 2\sqrt{\cos^2 2\varphi - 2 \cos 2\varphi}$ maxim dacă $\cos 2\varphi = -1$. Rezultă $\varphi = \pi/2 + k\pi$, $k = 0; 1$ și $|z| = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$. Prin urmare

$$z_1 = (1 + \sqrt{3}) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = (1 + \sqrt{3})i; \quad z_2 = -(1 + \sqrt{3})i.$$

D.1. $\triangle ABD \sim \triangle BCE \sim \triangle ACF$ și $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{ACF})$ și $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{CAF})$. Fie S punctul de intersecție ale dreptelor BE și CF . Rezultă ușor $m(\widehat{BSF}) = m(\widehat{ACB})$. Din $MN \parallel BE$, $MN = BE/2$ și $NP \parallel CF$, $NP = CF/2$, se obține $m(\widehat{BSF}) = m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{ACB})$ și $MN/NP = BE/CF = BC/AC$, adică $\triangle MNP \sim \triangle ABC$. Din $PT \parallel CE$, $PT = CE/2$, $QT \parallel AF$, $QT = AF/2$, rezultă $PT/QT = CE/AF = BC/AC$. În plus, $m(\widehat{CNM}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{CTQ})$ și $m(\widehat{CTP}) = m(\widehat{CNP})$, de unde $m(\widehat{QTP}) = m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{ACB})$ astfel că $\triangle PQT \sim \triangle ABC$.

2. Din $\triangle MNP \sim \triangle ABC \sim \triangle PQT$ și $\triangle ACF \sim \triangle ABD$ rezultă

$$\frac{MP}{AB} = \frac{PN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CF}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{RQ}{AB}, \text{ adică } MP = RQ$$

și

$$\frac{QP}{AB} = \frac{QT}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{RM}{AB}, \text{ de unde } QP = RM.$$

În plus, $m(\widehat{MPQ}) = 360^\circ - m(\widehat{QPT}) - m(\widehat{NPT}) - m(\widehat{MPN}) = 360^\circ - m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{ECF}) = 180^\circ - m(\widehat{ACF}) - m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{MRQ})$, astfel că patrulaterul $MPQR$ este paralelogram.

E. Folosind $\cos(2x - \alpha) \cos x = (1/2) \cdot [\cos(3x - \alpha) + \cos(x - \alpha)]$ și $\cos 2x \cdot \cos(x - \alpha) = (1/2) \cdot [\cos(3x - \alpha) + \cos(x + \alpha)]$, ecuația se scrie: $m[\cos(x - \alpha) - \cos(x + \alpha)] = \cos(x - \alpha) - \cos(3x - \alpha)$ sau $m \sin x \cdot \sin \alpha = \sin(2x - \alpha) \cdot \sin x$. Se obține $\sin x = 0$, cu $x \in$

$\in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ și $\sin(2x - \alpha) = m \sin \alpha$ cu condiția $|m \sin \alpha| \leq 1$, adică $m \in [-1/|\sin \alpha|, 1/|\sin \alpha|]$ și atunci

$$x \in \left\{ \frac{\alpha}{2} + (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin(m \sin \alpha) + \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

F. Fie M, N, P respectiv mijloacele muchiilor AB, AA' și AD . Planul $(BA'D)$ este paralel cu planul (MNP) . Distanța AO de la vârful A la planul (MNP) este egală cu distanța de la vârful B la planul (MNP) și anume este egală cu jumătate din înălțimea AO' a piramidei $ABDA'$, adică $d(A, (MNP)) = d(B, (MNP)) = a\sqrt{3}/6$ și $d(C', (MNP)) = AC' - AO = 5a\sqrt{3}/6$. Deoarece $d(D', (MNP)) = d(D', (BA'D)) + d((BA'D), (MNP))$, se calculează în două moduri volumul piramidei $A'BDD'$: $\mathfrak{V}(A'BDD') = \sigma[A'BD] \cdot d(D', (BA'D))/3 = \sigma[A'DD'] \cdot d(B, (A'DD'))/3 = a^3/6$, de unde $d(D', (BA'D)) = a\sqrt{3}/3$ și $d(D', (MNP)) = a\sqrt{3}/2$.

II.36. A. Din condițiile de existență rezultă $x \in [5, 25]$. Notind $\sqrt[4]{25 - x} = u, u > 0, \sqrt{x - 5} = v, v > 0$, ecuația este echivalentă cu sistemul: $u + v = 4, u^4 + v^2 = 20$. Din sistem se obține ecuația de gradul IV: $u^4 + u^2 - 8u - 4 = 0$, cu singura soluție pozitivă $u = 2$, astfel că $x = 9$ este soluția ecuației date.

B. Din $a_{n-1} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$, $n - 1$ radicali, rezultă $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ și

$$\frac{2 - a_n}{2 - a_{n-1}} = \frac{2 - \sqrt{2 + a_{n-1}}}{2 - a_{n-1}} = \frac{2 - a_{n-1}}{(2 - a_{n-1})(2 + \sqrt{2 + a_{n-1}})} = \frac{1}{2 + a_n}.$$

Prin inducție matematică se arată că $a_n < 2$.

C. Se scrie $z = \cos(7\pi/6) + i \sin(7\pi/6)$. Avem: $z^n = z \Leftrightarrow z^{n-1} = 1$, adică

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{6}(n-1) + i \sin \frac{7\pi}{6}(n-1) &= 1 \Rightarrow \sin \frac{7\pi}{6}(n-1) = 0 \text{ și } \cos \frac{7\pi}{6}(n-1) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{7\pi}{6}(n-1) &= 2k\pi \Rightarrow n = \frac{12k}{7} + 1 \in \mathbb{N} \text{ pentru } k = 7, 14, 21, \dots, 7p, \end{aligned}$$

adică $n = 12p + 1, p \in \mathbb{N}^*$.

D.1. Se arată că $EF \parallel AB$ și $AB \perp (AOD)$, astfel că AF este mediană în $\triangle dr. OAD$, $AF = (1/2) \cdot \sqrt{b^2 + h^2}$ și deci $\sigma[ABEF] = 3a\sqrt{b^2 + h^2}/8$ u.a.

2. $DC \perp (AOD)$ și $BC \perp (AOB)$; $\sigma_i = (1/2)(ah + bh + a\sqrt{b^2 + h^2} + b\sqrt{a^2 + h^2})$; $\mathfrak{V}(P) = (1/3)abh$.

II.37. A. $y^2 - (1-x)y + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = (1-x \pm \sqrt{-3x^2 + 2x + 9})/2 \in \mathbb{Z}$. Din $-3x^2 + 2x + 9 \geq 0 \Rightarrow x \in [(1-2\sqrt{7})/3, (1+2\sqrt{7})/3] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}$. Soluțiile ecuației date sînt: $(-1, 0), (-1, 2), (0, -1), (0, 2), (2, -1), (2, 0)$.

B. Se verifică că $x = 1/2, y = 1/3$ este o soluție a sistemului. Folosind monotonia funcțiilor exponențială și logaritmică se arată că această

soluție este unică. Pentru 210 consideră cazurile :

(a) $x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{6}$ și prima ecuație a sistemului nu se verifică.

(b) $x > \frac{1}{2}, y < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ și $\log_{\frac{1}{27}} y > \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, astfel că, ecuația a doua nu se verifică.

(c) $x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y > \frac{5}{6}$.

(d) $x < \frac{1}{2}, y > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y > \frac{1}{6}$.

C. $\widehat{BHC'} \equiv \widehat{BAC}$ (au același complement $\widehat{ABB'}$). Din $\triangle dr. BC'H \Rightarrow HC' = BC' \cdot \text{ctg } A$, iar din $\triangle dr. BC'C \Rightarrow BC' = BC \cos B$. Deci $HC' = (BC/\sin A) \cos A \cos B = 2R \cos A \cos B$ etc.

D. Se notează $AB = x, AC = y$ și $xy = z$. Din $h_a = 2\sigma[ABC]/a, h_b = 2\sigma[ABC]/y$ și $h_c = 2\sigma[ABC]/x$, conform enunțului, rezultă

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow x + y = \frac{xy}{a} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{xy}{a}\right)^2 - 2xy.$$

Teorema cosinusului ne dă $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$ etc. După calcule se obține ecuația $4z^2 - 15a^2z - 4a^4 = 0 \Rightarrow xy = 4a^2$ și $x + y = 4a$, adică $x = y = 2a$ și $\sigma[ABC] = a^2\sqrt{15}/4$ u.a.

E. Se duc prin N dreptele $NQ \parallel AB, NR \parallel BC$, iar prin M dreapta $MS \parallel AC$ (fig. II.37.E) și se folosește teorema cosinusului în triunghiurile MQN, NPR și MSP :

$MN^2 = NQ^2 + QM^2 - 2NQ \cdot QM \cos \widehat{QNM} = 17 + 8 \cos \widehat{A'AB}$. Din datele problemei, $\cos(\widehat{A'AB}) = 1/2$. Rezultă $MN = \sqrt{21}$ cm și analog, $NP = \sqrt{13}$ cm. În continuare, $MS = (AC + QR)/2 = (1/2) \cdot (AC + (AC + A'C')/2) = 5\sqrt{2}$ cm, $MP^2 = MS^2 + SP^2 - 2MS \cdot SP \cos(\widehat{MSP})$. Dar $\cos \widehat{MSP} = \cos \widehat{ACC'} = \sqrt{2}/2$. Deci $MP = \sqrt{34}$ cm, $\sigma[MNP] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{273}/2$ cm², $\varphi([ABCD A'B'C'D']) = 104 \cdot \sqrt{2}/3$ cm³.

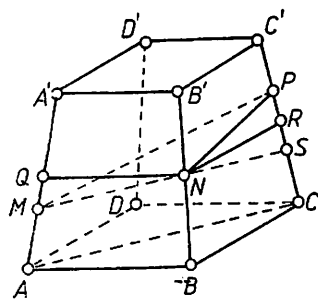


Fig. II.37.E

II.38. A.1. Se notează $\sqrt{2^x} = y, y > 0$; se obține $x_1 = 1/4, x_2 = 1/2$.

2. Se înlocuiește $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$ și ecuația se scrie $\cos(2x + \pi/8) \cdot \sin(\pi/8 - x) = 0$, de unde

$$x \in \left\{ \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B.1. Deoarece $(x - y)y > 0$, inegalitatea de demonstrat este:

$$x^2 + 2x(x - y) + (x - y)^2 \geq 8(x - y) \cdot y \Leftrightarrow (2x - 3y)^2 \geq 0.$$

Semnul egal are loc pentru $y = 2x/3$.

2. Primul membru al inegalității (2) se scrie succesiv :

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{B-C}{2} &= \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}} \right)^2 = \frac{S^2}{a^2bc} \left(\sqrt{\frac{p}{p-a}} + \sqrt{\frac{p-a}{p}} \right)^2 = \\ &= \frac{S^2}{a^2bc} \left(\frac{p}{p-a} + 2 + \frac{p-a}{p} \right) = \frac{r}{4R} \left(\frac{p^2}{(p-a)a} + \frac{2p}{a} + \frac{p-a}{a} \right),\end{aligned}$$

unde $R = abc/4S$ și $S = pr$. Folosind (1) se observă că inegalitatea (2) este demonstrată. Egalitatea are loc dacă $2a = b + c$ (laturile triunghiului sînt în progresie aritmetică) sau în cazul particular cînd triunghiul este echilateral.

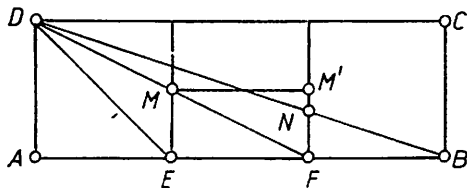


Fig. II.38.C

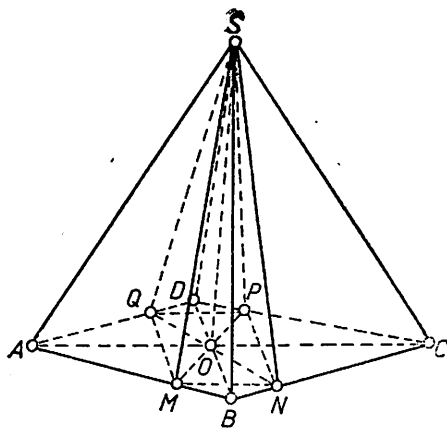


Fig. II.38.D

C.1. Din figura II.38.C și datele problemei rezultă $m(\widehat{AED}) = 45^\circ$, $\text{tg}(\widehat{AFD}) = 1/2$ și $\text{tg}(\widehat{ABD}) = 1/3$. Dar $\text{tg}(m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{ABD})) = [\text{tg}(\widehat{AFD}) + \text{tg}(\widehat{ABD})]/[1 - \text{tg}(\widehat{AFD}) \cdot \text{tg}(\widehat{ABD})] = 1$ astfel că $m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$.

$$\begin{aligned}2. \sigma[BNMF] &= \sigma[BNF] + \\ &+ \sigma[MNF] = FN \cdot BF/2 + FN \cdot \\ &\cdot MM'/2 = 3 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Din $\sigma[DMN] = \sigma[DFB] - \sigma[BNMF] = 1,5 \text{ cm}^2$ și $\sigma[ABCD] = 27 \text{ cm}^2$ rezultă $\sigma[DMN]/\sigma[ABCD] = 1/18$.

D. $\sigma[ABCD] = AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$, $SO = 2 \text{ cm}$. Fie M, N, P, Q picioarele înălțimilor fețelor laterale (fig. II.38.D). Potrivit teoremei reciproce a celor trei perpendiculare, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp DC$, $OQ \perp AD$, astfel că $MP = QN$ și $MP = \sigma[ABCD]/$

$|AB| = 2 \text{ cm}$, de unde $MO = NO = PO = QO = 1 \text{ cm}$. Din $\triangle dr. SOM$ se obține $SM = \sqrt{5} \text{ cm}$ și prin urmare $\sigma_1[SABCD] = 8\sqrt{5} \text{ cm}^2$. Baza piramidei $SMNPQ$ este un dreptunghi de arie $\sigma[MNPQ] = 2\sigma[MON] + 2\sigma[MOQ] = 2 \cdot (MO \cdot ON \cdot \sin 30^\circ)/2 + 2 \cdot (MO \cdot OQ \cdot \sin 150^\circ)/2 = 1 \text{ cm}^2$. $\sigma([SMNPQ]) = 2/3 \text{ cm}^3$.

E.1. Se determină semnul produsului $(x + y)(x^2 + y^2 - 7/3)$ știind că $x + y < 0$ și $7(x + y) = 3(x^3 - y^3)$. Se obține $(x + y)(x^2 + y^2 - 7/3) = x^3 + y^3 + xy^2 + yx^2 - (7/3) \cdot (x + y) = x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y - (x^3 - y^3) = 2y^3 + xy^2 + x^2y < 0$ (sumă de numere strict negative). Rezultă $x^2 + y^2 - 7/3 > 0$, adică $x^2 + y^2 > 7/3$.

2. Notăm $x + y = s$ și $xy = p$. Din prima ecuație rezultă $x^3 - y^3 < 0 \Rightarrow x - y < 0$, astfel că $x - y = -\sqrt{(x + y)^2 - 4xy} = -\sqrt{s^2 - 4p}$

și sistemul se scrie :

$$\begin{cases} 7s = -3(s^2 - p)\sqrt{s^2 - 4p} \\ s^2 - 2p = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s^2 = 5 + 2p \\ 7\sqrt{5 + 2p} = -3(5 + p)\sqrt{5 - 2p}. \end{cases}$$

Din $p > 0$ și $5 - 2p \geq 0$ rezultă $p \in (0, 5/2]$. Ecuația a doua, prin ridicare la pătrat, conduce la $18p^3 + 135p^2 + 98p - 880 = 0$, care admite soluția reală $p = 2$. În continuare se obține $s = -3$ și deoarece $x - y < 0$, din $x + y = -3$ și $xy = 2$ rezultă $x = -2$, $y = -1$.

II.39. A.1. $x = 4$.

2. Punem condițiile $x + 5 > 0$, $x + 5 \neq 1$ și $2x + 7 > 0 \Rightarrow x \in (-7/2, +\infty)$, iar ecuația se mai scrie $\log_2 4(2x + 7) = \log_2 (x + 5)^2$, de unde $x_1 = -3 \in (-7/2, +\infty)$, $x_2 = 1 \in (-7/2, +\infty)$.

3. Folosind notația $\sin x + \cos x = t$, $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ecuația devine $t^5 - 5t + 4 = 0$, care se rezolvă aplicând schema lui Horner: $t_1 = t_2 = 1$ și ecuația $t^3 + 2t^2 + 3t + 4 = 0$ care nu admite rădăcini în $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ($t^3 + 2t^2 + 3t + 4 > 0$, $\forall t \geq -\sqrt{2}$). Din $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \pi/4) = \sqrt{2}/2$ se obține

$$x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

B.1. Sistemul are loc dacă $x + y > 0$, $y \geq 0$ și $x > 0$. Din ecuația a doua rezultă $x - 1 = \sqrt{2y}$, adică $x \geq 1$ și $y = (x - 1)^2/2$. Se înlocuiește în prima ecuație și se obține $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. În condițiile $x \geq 1$ și $y \geq 0$, soluțiile sistemului sînt $(1; 0)$ și $(2; 1/2)$.

2. Din prima ecuație a sistemului, în condițiile $x \geq -1$, $xy \geq -3$, rezultă $x(2x + y - 1) = 0$, de unde $x = 0$, sau $2x = 1 - y$. Soluțiile sistemului sînt: $(0; 1)$, $(1; -1)$.

C.1. Se aplică teorema lui Menelaus triunghiurilor $AA'B$ și $AA'C$ tăiate de transversalele EC_1 și DB_1 .

2. Se duce dreapta OI care intersectează cercul $\odot(O, R)$ în punctele E și F și se scrie puterea punctului I față de acest cerc (fig. II.39.C). Avem: $\rho(I) = IA \cdot ID = IE \cdot IF = (R - IO) \cdot (R + IO)$. Deci $IA \cdot ID = R^2 - IO^2$ (1). Din $\Delta \text{dr. } AMI$ rezultă $AI = r/\sin(A/2)$ (2), iar teorema sinusurilor aplicată în ΔABD dă $BD = 2R \sin(A/2)$. În continuare se arată că ΔBDI este isoscel, adică $BD = ID = 2R \sin(A/2)$ (3). Înlocuind în (1) relațiile (2) și (3) se obține egalitatea din problemă.

D.1. Piramida $[SABC \dots M]$ se împarte în piramide avînd ca baze fețele piramidei date și ca vîrf centrul sferei înscrise în piramida dată. Înălțimile acestor piramide sînt toate egale cu raza r a sferei înscrise în piramida $[SABC \dots M]$. Prin urmare

$$\mathcal{V}(P) = (1/3) \cdot r (\sigma[ABC \dots M] + \sigma[SAB] + \sigma[SBC] + \dots$$

$$\dots + \sigma[SMA]) = (1/3) \cdot r \sigma_t(P),$$

de unde $r = 3\mathcal{V}(P)/\sigma_t(P)$.

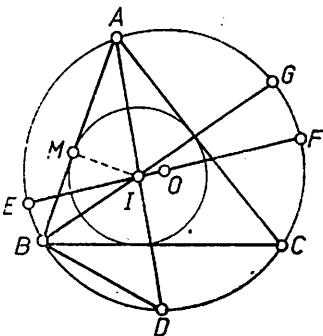


Fig. II.39.C

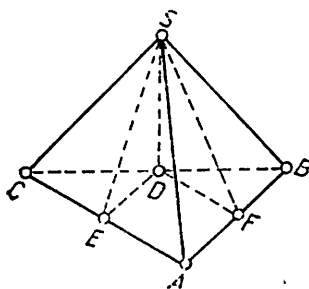


Fig. II.39.D

2. (a) În piramida $[SABC]$ (fig. II.39.D) avem: $BC=a$, $(SBC) \perp (ABC)$, $SB=SC$, $SD \perp BC$, $DE \perp AC$, $DF \perp AB$. Se ține seama de enunț și se aplică teorema celor trei perpendiculare și se determină $SE=SF=a\sqrt{2}/2$, apoi $SD=a\sqrt{6}/4$. În final se obține $\sigma_i(P)=(a^2/8)(6+\sqrt{6})$ și $\varphi(P)=a^3\sqrt{6}/48$.

(b) Folosind rezultatul de la punctul 1, se obține $r=a/2(\sqrt{6}+1)$, de unde $\varphi(S)=a^3/6(\sqrt{6}+1)^3$.

II.40. A.1. Inecuația (1) are loc pentru $-x^2+4x>0$, $-x^2+4x-3\leq 0$, de unde $x\in(0,1]\cup[3,4)$.

Inecuația (2) este echivalentă cu sistemul $3x-2\geq 0$, $3x+7\geq 6/\sqrt{3x-2}$, de unde rezultă $x\in[2/3,+\infty)$.

2. Pentru ecuația (3) se impun condițiile $4x-x^2>0$, $\log_2 \frac{4x-x^2}{3} \leq 0$, adică $x\in(0,1]\cup[3,4)$. În aceste condiții, ecuația (1) se scrie sub forma

$$\log_2 \frac{4x-x^2}{3} = -1 \Rightarrow \frac{4x-x^2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4-\sqrt{10}}{2} \in (0,1], \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{10}}{2} \in [3,4).$$

Ecuația (4) are sens pentru $(3x+7)/6 - \sqrt{3x-2} \geq 0$, adică $x\in[2/3,+\infty)$. Cu notația $\sqrt{3x-2}=t$, $t\geq 0$, ecuația se scrie $\sqrt{t^2+6t+9} + \sqrt{t^2-6t+9} = 6 \Leftrightarrow t+3+|t-3|=6$, sau $\sqrt{3x-2}+|3-\sqrt{3x-2}|=3$. Pentru $x\in[2/3,11/3]$, ecuația (4) admite o infinitate de soluții; pentru $x\in(11/3,+\infty)$, ecuația (4) nu admite soluții.

B. Scriind ecuația a doua a sistemului sub forma $(z/\sqrt{3})^2 + (t/\sqrt{3})^2 = 1$, rezultă că punctele $M(x,y)$ și $N(z/\sqrt{3}, t/\sqrt{3})$ aparțin cercurilor de rază unitate, motiv pentru care se introduce notația $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, $z=\sqrt{3}\cos\beta$, $t=\sqrt{3}\sin\beta$, cu $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$. Ecuația a treia conduce la $\alpha+\beta=\pi/2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, iar din ecuația a patra se obține $a=2$ și $\alpha=\pi/3+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. În final se obține soluția $x=1/2$, $y=\sqrt{3}/2$, $z=3/2$, $t=\sqrt{3}/2$.

Observație. Propunem cititorului să rezolve sistemul $x^2+y^2=1$, $z^2+t^2=4$, $x+z=(2+\sqrt{3})/2$, $xt+yz=a$, unde a este cel mai mare număr real posibil, ce trebuie determinat, astfel ca sistemul să fie compatibil.

C. Se duce perpendiculara în M pe AM și se notează cu E punctul de intersecție a perpendicularei cu prelungirea laturii BC (fig. II.40.C).

Patrulaterul $AMBE$ este inscribibil ($m(\widehat{AME}) = m(\widehat{ABE}) = 90^\circ$) și $m(\widehat{AEM}) = m(\widehat{ABM}) = 45^\circ$, adică $\Delta dr. AME$ este isoscel. Se aplică teorema sinusurilor în ΔAME și ΔAMD : $AM/\sin E =$

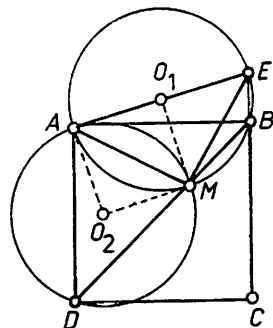


Fig. II.40.C

$=2R_1$, $AM/\sin D=2R_2$ și folosind $m(\widehat{E})=m(\widehat{D})=45^\circ$ rezultă $R_1=R_2$. Se arată că AO_1MO_2 este pătrat.

D. Se arată simplu că $z^n + \bar{z}^n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și se folosește faptul că $z \cdot \bar{z} = 4$. Se obțin rezultatele $\pm 2i$, $\pm(1 - i/\sqrt{3})$, $\pm(-1 - i/\sqrt{3})$.

E. Din $\Delta dr. ADP \equiv \Delta dr. ABM$ rezultă $PD=MB$ astfel că $PM \parallel DB$ și $PM = DB = a/\sqrt{2}$ (fig. II.40.E). Triunghiul $\widehat{AMP}$ este echilateral ($m(\widehat{MAP}) = 60^\circ$); astfel că $AM = a/\sqrt{2}$ și $\sigma[AMNP] = (a/\sqrt{2})^2 \cdot \sin 60^\circ = a^2/\sqrt{3}$. Din faptul că $ABCD$ este proiecția rombului $AMNP$ pe planul bazei prisme, avem $\sigma[ABCD] = \sigma[AMNP] \cos \varphi$, unde $\varphi = m(\widehat{CAN})$ este măsura unghiului diedru format de planul (α) cu planul bazei prisme. Se obține $\cos \varphi = 1/\sqrt{3}$, adică $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$. Din $\Delta dr. ACN$ rezultă $NC = AC \operatorname{tg} \varphi = 2a$.

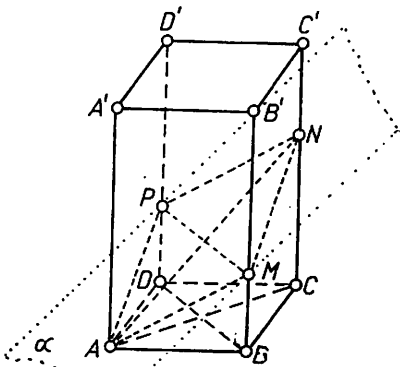


Fig. II.40.E

II.41. A. Din $x \in (-1, 0)$, rezultă notația $x = \cos t$, $t \in (\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2)$. Ecuația se scrie $4 \cos t \cdot \cos 2t = 1 \Leftrightarrow 4 \sin t \cdot \cos t \cdot \cos 2t = \sin t$ ($\sin t \neq 0$ pentru că $x \neq \pm 1$). Se obține $\sin 4t = \sin t \Leftrightarrow \sin(3t/2) \cdot \cos(5t/2) = 0 \Rightarrow t_1 = 2\pi/3, t_2 = 4\pi/3, t_3 = 3\pi/5, t_4 = 7\pi/5$, astfel că: $x_1 = \cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2 \in (-1, 0)$, $x_2 = \cos(3\pi/5) = \cos(7\pi/5) = (1 - \sqrt{5})/4 \in (-1, 0)$.

Altfel. Ecuația $8x^3 - 4x - 1 = 0$ admite o soluție $x_1 = -1/2$. Aplicând schema lui Horner se obține ecuația $4x^2 - 2x - 1 = 0$ cu soluția $x_2 = (1 - \sqrt{5})/4 \in (-1, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{B. } \frac{x^2(xy^2 + 1) + y^2}{xy^2 + 1} &= \frac{121}{13} \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{xy^2 + 1} = 9 + \frac{4}{13} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x + 1/y^2} = 3^2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Singurele soluții în $\mathbb{N}$ sînt $x = 3, y = 2$.

C. Fie AD înălțimea ΔABC și E simetricul lui C față de AD (fig. II.41.C). Din asemănarea triunghiurilor isoscele ACE și ABE se obține $CE/AE = AC/BE \Rightarrow CE^2 + CE - 1 = 0 \Rightarrow CE = (\sqrt{5} - 1)/2$ și deci $AB = BE = BC + CE = (1 + \sqrt{5})/2$. În continuare se aplică teorema cosinului în ΔABC ; se obține $\cos 36^\circ = (1 + \sqrt{5})/4$, $\cos 108^\circ = (1 - \sqrt{5})/4$.

D.1. Dreapta (d) este mediatoarea segmentului $[CE]$ și $A'C$ bisectoarea unghiului $\widehat{CAE}$ (fig. II.41.D). Deoarece bisectoarele AD și AC' sînt perpendiculare, rezultă $m(\widehat{BAE}) = 180^\circ$, adică punctele B, A, E sînt coliniare.

2. Din $\triangle BB'E$ rezultă $BE < BB' + B'E$. Dar $B'E = B'C$, $BE = AB + AE$ și $AE = AC$. Se obține $AB + AC < BB' + B'C'$.

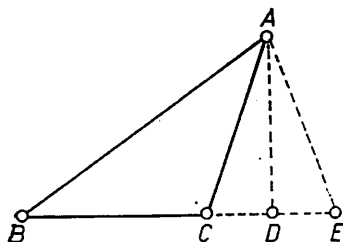


Fig. II.41.C

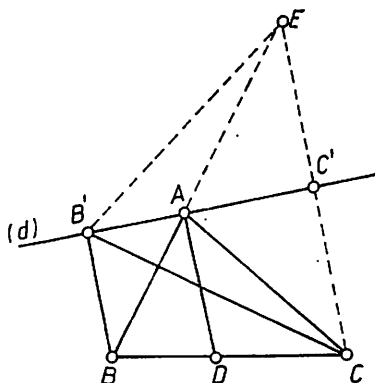


Fig. II.41.D

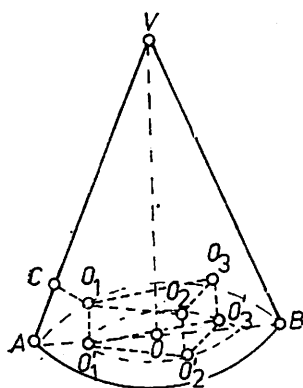


Fig. II.41.E

E. Fie O_1, O_2, O_3 centrele sferelor și O'_1, O'_2, O'_3 proiecțiile lor pe baza conului (fig. II.41.E), $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r = 2$ și $\triangle O'_1O'_2O'_3 \equiv \triangle O_1O_2O_3$. Centrul bazei conului (punctul O) coincide cu centrul de greutate al triunghiului echilateral $O'_1O'_2O'_3$. Deci $OO'_1 = 2\sqrt{3}/3$. Din $\triangle ACO_1 \equiv \triangle AO_1O'_1$ și $\widehat{CAO'_1} = 60^\circ$ se obține $\widehat{O_1AO'_1} = 30^\circ$, astfel că $\triangle dr. AO'_1O_1$ ne dă $AO'_1 = O_1O'_1 \cdot \text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3}$. Raza bazei conului este $AO = AO'_1 + O'_1O_1 = 5\sqrt{3}/3$.

II.42. A. Necesitatea. Fie $x = [x] - t$, cu $t \in (0, 1)$. Presupunem că $[x^2] = [x]^2$. Avem: $[x^2] = [(x) + t]^2 = [x^2 + 2 \cdot [x]t + t^2]$. Dar $[x]^2 = [x^2]$ astfel că $[x^2] = [x^2 + 2[x]t + t^2] \Leftrightarrow [x^2] = [x^2] + [2[x]t + t^2]$ de unde $[2[x]t + t^2] = 0$, adică $0 < 2[x]t + t^2 < 1$. De aici rezultă sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 2(x-t)t + t^2 > 0 \\ 2(x-t)t + t^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xt > t^2 \\ 2xt < 1 + t^2, \end{cases}$$

astfel că necesitatea este demonstrată, adică $x \in (t/2, (1 + t^2)/2t)$.

Suficiența. Din $x \in (t/2, (1 + t^2)/2t)$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2xt > t^2 \\ 2xt < 1 + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-t)t + t^2 > 0 \\ 2(x-t)t + t^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow [2(x-t)t + t^2] = 0 \quad (1)$$

Înlocuind în (1) $t = x - [x]$ și $x - t = [x]$ se obține $[x^2 - [x]^2] = 0$, de unde $[x]^2 = [x^2]$ și suficiența este demonstrată.

B. Domeniul de rezolvabilitate al ecuației se obține din sistemul:

$$\begin{cases} 7x^2 + 28x + 26 \geq 0 \\ 5x^2 + 5x - 10 \geq 0 \\ 7x^2 + 28x + 26 \geq 5x^2 + 5x - 10 \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{D} = [1, +\infty).$$

Se scrie ecuația sub forma $\sqrt{7x^2 + 28x + 26} = \sqrt{5x + 20} + \sqrt{5x^2 + 5x - 10}$, care prin ridicare la pătrat devine: $x^2 + 9x + 8 = 5\sqrt{(x+4)(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 + 6(x+2) = 5\sqrt{(x^2 + 3x - 4)(x+2)}$. Deoarece $x = -2 \notin \mathbb{D}$, se împarte ecuația obținută prin $x+2$ și cu notația $\sqrt{(x^2 + 3x - 4)/(x+2)} = y, y \geq 0$, se obține $y^2 - 5y + 6 = 0$, de unde $y_1 = 3, y_2 = 2$. Soluțiile ecuației sînt: $x_1 = 3 + \sqrt{31} \in \mathbb{D}, x_2 = -4 \in \mathbb{D}$.

C. Fie $AE = BC = CF = x$ și $BE = AF = y$ (fig. II.42.C). Folosind puterea punctului față de cerc și datele problemei, se obține $\rho(E) = \rho(F) = 2 = xy$. Teorema cosinusului aplicată respectiv triunghiurilor

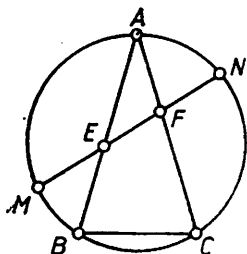


Fig. II.42.C

ABC și AEF dă $x^2 = 2(x+y)^2 \cdot (1 - \cos 36^\circ)$ (1), $1 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 36^\circ$ (2). Relația (2) se mai scrie $(x+y)^2 - 4(1 + \cos 36^\circ) = 1$, de unde $AB = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$ cm. Înlocuind în (1) se obține $BC = AB\sqrt{2(1 - \cos 36^\circ)} = (1/2) \cdot \sqrt{26 - 6\sqrt{5}}$ cm, $R = BC/2 \sin 36^\circ = \sqrt{(13 - 3\sqrt{5})/(5 - \sqrt{5})}$ cm.

Observație. Pentru $\cos 36^\circ$ s-a folosit rezultatul obținut la problema II.41.C.

D. Înlocuind $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, cu $\varphi \in [0, 2\pi)$,

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \quad \text{și} \quad -\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right),$$

se obține

$$A = \cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{3} \right).$$

A este cel mai mare număr real posibil dacă $\sin(2\varphi - \pi/3) = 0$ și $\cos(2\varphi - \pi/3) = 1$, de unde $2\varphi - \pi/3 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, adică $\varphi = \pi/6 + k\pi, \varphi \in [0, 2\pi)$ și $k \in \mathbb{Z}$. Se obține

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_2 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

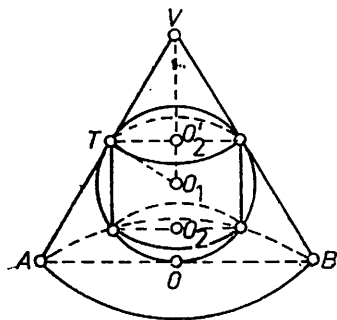


Fig. II.42.E

E. Din Δ dr. VTO_1 cu $m(\angle TVO_1) = 30^\circ$ (fig. II.42.E) se obține $VO_1 = 2 \cdot O_1T = 2$ cm și deci $VO = h = 3$ cm; $AO = R = VO \cdot \tan 30^\circ = 3$ cm. Din Δ dr. TO_2O_1 rezultă $O_1O_2' = (1/2) \cdot TO_1 = 1/2$ cm și $TO_2' = O_1T \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ cm.

$$\sigma_1(\text{cilindru}) = \pi \cdot TO_2'(TO_2' + 2O_1O_2') = (3 + 2\sqrt{3})\pi/4 \text{ cm}^2,$$

$$\mathcal{V}(\text{cilindru}) = 3\pi/4 \text{ cm}^3, \quad \mathcal{V}(\text{con}) = \pi R^2 h/3 = 3\pi \text{ cm}^3 \quad \text{și} \quad \mathcal{V}(\text{cilindru})/\mathcal{V}(\text{con}) = 1/4.$$

I.1. A. Doi curieri pleacă din același loc la interval de o oră, pe un drum rectiliniu, cu vitezele constante de 6 km/h, respectiv 7 km/h. După cât timp și la ce distanță de locul de plecare se vor întâlni?

B. Un punct material execută 150 oscilații pe minut, cu o amplitudine $A = 0,05$ m. Faza inițială se consideră $\varphi = 15^\circ$. Se cere :

1. Frecvența și pulsația oscilațiilor.

2. Ecuația mișcării oscilatorii.

3. Raportul dintre energia cinetică și energia potențială a punctului material, în momentul în care elongația este jumătate din amplitudine.

C. Un acvariu conține 25 l apă la temperatura de 17°C . Câtă apă cu temperatura de 72°C trebuie introdusă în acvariu pentru a obține un amestec cu temperatura de 22°C ?

D. Subiect teoretic :

Legea transformării și conservării energiei în procesele mecanice.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil mecanic, metalurgic, chimic, construcții, poligrafie, București, 1978)

I.2. A. Două mobile de masă $m_1 = 8$ kg și respectiv $m_2 = 2$ kg se află la distanța $d = 112,5$ m unul de celălalt. Corpurile se deplasează unul spre celălalt pe o suprafață orizontală, cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,2$. Se imprimă corpurilor simultan vitezele inițiale $v_{01} = 20$ m/s și $v_{02} = 30$ m/s. Să se afle :

1. Timpul după care se ciocnesc.

2. Spațiul parcurs de mobile după ciocnire, aceasta fiind considerată plastică.

3. Variația energiei cinetice în urma ciocnirii ($g = 10$ m/s²).

B. Un oscilator constituit dintr-un punct material de masă $m = 1,6 \cdot 10^{-2}$ kg, atârnat la capătul unui resort, vibrează sub acțiunea forței elastice a resortului, ecuația elongației avînd forma

$$y = 0,1 \sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ m.}$$

Se cere :

1. Perioada și frecvența oscilației.

2. Viteza maximă și accelerația maximă a punctului material.

3. Timpul în care punctul material execută drumul de la jumătatea amplitudinii la $\sqrt{3}/2$ din amplitudine.

C. Se încălzesc două piese metalice de oțel, de mase diferite, în așa fel încît ele suferă o dilatare de volum la fel de mare. Care dintre corpuri a primit pentru aceasta o cantitate de căldură mai mare?

D. Subiect teoretic :

Forța centrifugă și forța centripetă.

(Admitere treapta a II-a, profil electrotehnic, București, 1978)

I.3. A. Un pendul alcătuit dintr-o bilă A cu masa $m_A = 1$ kg și un fir cu lungimea $l = 10$ m, aflat inițial în poziție orizontală, este lăsat liber. În momentul în care pendulul trece prin poziția verticală, bila A ciocnește un corp B de masă $m_B = 1$ kg aflat în repaus, pe o suprafață orizontală.

1. În cazul în care ciocnirea este plastică, să se afle înălțimea H la care ajunge corpul nou format ($A + B$) față de suprafața orizontală.

2. În cazul în care ciocnirea este elastică, iar coeficientul de frecare între corpul B și suprafața orizontală este $\mu = 0,2$, să se afle timpul t cît durează mișcarea corpului B și spațiul s parcurs de acesta.

B. Tensiunea instantanee aplicată la bornele unei bobine este $u = \sqrt{2} \cdot 120 \cdot \sin 100 \pi t$ (V). Bobina primește o putere activă $P = 180$ W și o putere reactivă $P_r = 60\sqrt{3}$ VAR. Să se afle :

1. Rezistența și inductanța bobinei.

2. Impedanța bobinei și intensitatea instantanee a curentului electric prin bobină.

3. Legînd în serie cu bobina un condensator și aplicînd la capetele circuitului aceeași tensiune, să se calculeze valoarea capacității C a condensatorului, astfel încît puterea activă primită de circuit să fie maximă, precum și valoarea acestei puteri $P_{\max}$.

(Admitere treapta a II-a, licee de fizică, București, 1979).

I.4. A. Să se calculeze intensitatea curentului printr-o bobină cu $L = 0,5$ H și $R = 5 \Omega$, aflată sub tensiunea efectivă $U = 100$ V, cu frecvența de 50 Hz.

B. De un resort elastic, a cărui constantă elastică este $k = 10^3$ N/m, este suspendat un corp de masă $m = 0,1$ kg. Pendulul elastic astfel format oscilează. Impulsul pendulului la distanța $y_1 = 3$ cm de poziția de echilibru este $p_1 = 0,3\sqrt{3}$ kg·m/s. Se cere :

1. Legea de mișcare (faza inițială este nulă).

2. Energia cinetică și energia potențială în momentul în care $y_2 = 2$ cm.

C. Subiecte teoretice :

Inerția și masa. Mișcarea circulară uniformă.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, București, 1980)

I.5. A. De la baza unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ se lansează în sus pe plan un corp cu viteza inițială v_0 . La revenirea în punctul de plecare, viteza corpului este $v = 3v_0/4$. Să se calculeze coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe plan.

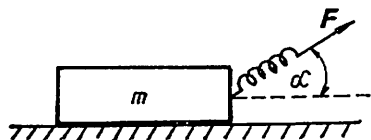


Fig. I.5.B

B. Asupra unui corp așezat pe un plan orizontal se acționează cu un resort de masă neglijabilă după direcția și sensul din figura I.5.B. Cunoscîndu-se unghiul α , accelerația gravitațională g , masa corpului m , coeficientul de frecare dintre corp

și plan μ și constanta elastică a resortului k , să se determine :

1. Valoarea maximă a forței F cu care se acționează astfel încît corpul să rămînă încă în repaus.

2. Valoarea minimă a energiei de deformare a resortului pentru care corpul poate fi scos din repaus.

C. Frecvența de rezonanță a unui circuit serie format dintr-un condensator și o bobină este $\nu_0 = 2$ kHz. Pentru o frecvență $\nu = 1$ kHz a tensiunii de alimentare, impedanța circuitului este de $1 \text{ k}\Omega$. Rezistența bobinei este $10 \text{ }\Omega$. Să se calculeze inductanța bobinei și capacitatea condensatorului.

D. Subiect teoretic :

Interacțiunea dintre două conductoare paralele parcurse de curent electric.

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1980)

I.6. A. Un corp din fontă, cu masa $m = 20 \text{ kg}$ și densitatea $\rho = 7\,500 \text{ kg/m}^3$, poate să plutească pe suprafața mercurului de densitate $\rho_1 = 13\,600 \text{ kg/m}^3$. Calculați volumul porțiunii din corp cufundat în mercur și volumul total al corpului.

B. Două sfere conductoare mici, avînd fiecare masa $m = 0,4 \text{ g}$, aflate la capetele a două fire de mătase de lungime $l = 12 \text{ cm}$, suspendate în același punct, au fost electrizate simultan cu sarcini egale, de același semn. Sferele se resping la o distanță $d_1 = 8 \text{ cm}$ într-un lichid și la o distanță $d = 10 \text{ cm}$ în aer.

1. Calculați sarcina electrică Q de pe fiecare sferă.

2. Găsiți permitivitatea relativă a lichidului ($\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

C. Subiecte teoretice :

1. Forța centrifugă. Aplicații.

2. Ciclul Carnot.

3. Autoinducția. Impedanța unui circuit.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil mecanic, electrotehnic, aeronautic, București, 1981)

I.7. A. Un tren frînează cu o forță de $n = 10$ ori mai mică decît greutatea sa. Știînd viteza inițială $v_0 = 108 \text{ km/h}$, să se afle timpul pînă la oprire și distanța parcursă ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

B. O baterie debitează pe o rezistență exterioară de $10 \text{ }\Omega$ un curent de 3 A . Dacă se înlocuiește rezistența de $10 \text{ }\Omega$ cu una de $20 \text{ }\Omega$, atunci intensitatea curentului devine $1,6 \text{ A}$. Ce tensiune electromotoare și ce rezistență interioară are bateria?

C. Subiecte teoretice :

1. Mișcarea pe plan înclinat.

2. Topirea și solidificarea.

3. Potențialul electric.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil mine-petrol, metalurgie, construcții, poligrafie, București, 1981)

I.8. A. Lăsat liber, un corp ajunge la sol în timpul $t = 8 \text{ s}$. Aflați înălțimea de la care a fost lăsat să cadă liber și viteza cu care ajunge corpul la sol.

B. Ce putere trebuie să dezvolte un motor pentru a ridica uniform, la înălțimea $h = 20$ m, un corp cu masa $m = 60$ kg, dacă ridicarea se face în timp de 15 s?

C. Să se calculeze intensitatea curentului printr-o bobină cu induc-tanța $L = 0,5$ H și $R = 5 \Omega$, aflată pe rînd :

1. Sub tensiunea alternativă cu valoarea efectivă $U = 100$ V, cu frecvența de 50 Hz.

2. Sub tensiunea continuă avînd aceeași valoare $U = 100$ V.

D. Subiecte teoretice :

1. Transmiterea presiunii prin lichide. Legea lui Pascal (enunțul legii, expresia ei, presa hidraulică — aplicația acestei legi).

2. Indicați o metodă prin care se poate pune în evidență fenomenul de inducție electromagnetică.

(Admitere treaptă a II-a, licee matematică-fizică, județul Argeș, 1981)

I.9. A. Un corp cu masa $m_1 = 2$ kg este fixat de un resort orizontal, netensionat. El este ciocnit elastic pe direcția axului resortului de un corp care are masa $m_2 = 4$ kg și viteza $v_2 = 3$ m/s. Știînd că resortul, care are constanta elastică $k = 7 \cdot 10^2$ N/m, se comprimă pe distanța $x = 20$ cm, să se determine :

1. Vitezele corpurilor imediat după ciocnire.

2. Spațiul de oprire, după ciocnire, al corpului de masă m_2 (coeficientul de frecare este același pentru ambele corpuri). Se consideră $g = 10$ m/s².

B. Într-un tub cilindric orizontal, deschis la ambele capete, se află două pistoane ușoare, de secțiune $S = 20$ cm² care se pot deplasa fără frecare. Pistoanele sînt legate printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă, întins și netensionat. Presiunea și temperatura aerului dintre cele două pistoane și în exterior sînt $p_0 = 10^5$ N/m², $t = 27$ °C. Cu cît poate să varieze temperatura aerului delimitat de cele două pistoane, astfel ca firul să nu se rupă? Tensiunea maximă suportată de fir este $F = 40$ N.

C. Se consideră un electron accelerat sub tensiunea de 100 V, care pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducție $B = 2 \cdot 10^{-3}$ T, astfel încît vectorul viteză face un unghi de 45° cu direcția vectorului inducție magnetică.

1. Să se precizeze și să se justifice forma traiectoriei.

2. Să se calculeze elementele traiectoriei.

Se dau $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

D. Subiecte teoretice :

1. Momentul forței în raport cu un punct (definiție, expresia mărimii, unitate de măsură).

2. Să se exprime ecuația Clapeyron-Mendeleev și să se precizeze semnificația fiecărei mărimi.

3. Energia și puterea curentului electric continuu.

(Admitere treaptă a II-a, licee matematică-fizică și fizică-chimie, 1981)

I.10. A. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 10$ m. În același moment, un alt corp este aruncat vertical în jos de la o înălțime $H = 20$ m. Să se afle viteza inițială a celui de al doilea corp, dacă ambele corpuri au căzut simultan pe pămînt.

B. Să se afle masa dioxidului de carbon ($\mu = 44 \text{ kg/kmol}$) aflat într-un balon de volum $V = 40 \text{ l}$ la temperatura $t = 13^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 2,7 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ($R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$).

C. Subiecte teoretice :

1. Legea lui Arhimede.
2. Gruparea rezistoarelor.

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, București, 1982).

I.11. A. De un tren cu masa $M = 100 \text{ t}$, care merge rectiliniu uniform, se desprinde la un moment dat ultimul vagon având masa $m = 10 \text{ t}$. Acesta parcurge o distanță $d = 9 \text{ km}$ până se oprește. La ce distanță de vagon se va găsi în acest moment trenul dacă forța de tracțiune a locomotivei a rămas aceeași? (La mișcarea trenului și a vagonului se consideră același coeficient de frecare).

B. Într-un cilindru cu piston mobil fără frecare se află azot cu masa $m = 1 \text{ kg}$ ($\mu = 28 \text{ kg/kmol}$).

1. Ce căldură absoarbe gazul pentru ca temperatura lui să crească cu 10°C ?

2. Să se afle înălțimea cu care se ridică pistonul după încălzirea gazului. (Se dau : greutatea pistonului $G = 9,8 \text{ N}$, secțiunea sa $S = 1 \text{ m}^2$, presiunea atmosferică deasupra pistonului $p_0 = 1 \text{ atm}$; pentru azot $C_p = 7R/2$, $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$).

C. Un generator electric produce printr-un rezistor de 9Ω o putere electrică.

1. Ce rezistență interioară are generatorul dacă el produce aceeași putere printr-un rezistor de 16Ω ?

2. Știind că valoarea tensiunii maxime suportate de primul rezistor (de 9Ω) este 9 V , iar pentru cel de al doilea 32 V , să se determine puterile maxime care se pot obține prin gruparea celor două rezistoare : (a) în serie și (b) în paralel.

D. Subiecte teoretice :

1. Conservarea energiei mecanice în căderea liberă și în mișcarea oscilatorie a punctului material.

2. Să se definească inducția electromagnetică, să se deducă și enunțe legea acestui fenomen.

(Admitere treapta a II-a licee matematică-fizică, 1982),

I.12. A. Un corp aruncat vertical în sus ajunge la înălțimea maximă $h = 19,6 \text{ m}$. După cât timp revine el la pământ? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

B. Două corpuri punctiforme cu sarcinile $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, respectiv $Q_2 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, se găsesc în aer la distanța $d = 10 \text{ cm}$ unul de altul.

1. Care este intensitatea cîmpului electric produs de fiecare corp încărcat în punctul în care se găsește celălalt?

2. Ce forță acționează asupra fiecărui corp încărcat? ($\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\epsilon_r = 1$).

C. Subiecte teoretice :

1. Să se enunțe principiul acțiunilor reciproce.

2. Să se scrie ecuația primului principiu al termodinamicii și să se precizeze semnificația fiecărei mărimi fizice din această ecuație.

3. Scrieți expresiile legilor lui Ohm.

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, județul Dolj, 1983)

I.13. A. Un corp cu masa $m = 20 \text{ kg}$ se deplasează cu viteza constantă pe distanța $d = 60 \text{ m}$, pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare este $\mu = 0,45$. Forța aplicată corpului face un unghi $\varphi = 30^\circ$ cu orizontala. Să se calculeze :

1. Forța aplicată corpului.
2. Lucrul mecanic total efectuat asupra corpului.

B. Două conductoare foarte lungi, paralele, aflate la distanța $d = 10 \text{ cm}$ unul de celălalt, sînt parcurse de curenți de același sens, avînd intensitățile $I_1 = 5 \text{ A}$ și $I_2 = 10 \text{ A}$. Să se afle inducția magnetică a cîmpului rezultat în următoarele puncte :

1. La jumătatea distanței dintre cele două conductoare.
2. Într-un punct exterior situat la $d_1 = 5 \text{ cm}$ de curentul mai slab și la $d_2 = 15 \text{ cm}$ de celălalt ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$).

C. Subiecte teoretice :

1. Legea transformării izocore a gazului ideal (legea lui Charles).
 2. Forța centripetă.
 3. Potențialul electric (definiție, unitate de măsură).
- (Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, București, 1983)

I.14. A. Un camion cu masa 5 t pornește din repaus în mișcare rectilinie uniform accelerată cu $a = 0,61 \text{ m/s}^2$. Să se calculeze :

1. Distanța parcursă pînă în momentul în care camionul are viteza de 36 km/h .
2. Forța de tracțiune dezvoltată de motor dacă rezultanta forțelor de frecare reprezintă $0,04$ din greutatea camionului.
3. Lucrul mecanic total efectuat asupra camionului în cea de a 5-a secundă a mișcării sale ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

B. Un balon cu $V_1 = 1 \text{ m}^3$ în care se află aer la presiunea p_1 este pus în legătură cu un alt balon cu $V_2 = 2V_1$ în care se află aer la presiunea $p_2 = 3,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

1. Să se determine p_1 știind că presiunea în sistem, după ce baloanele au fost puse în legătură, este $3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Dacă aerul din balonul cu volumul V_1 (considerat separat de al doilea balon) la presiunea p_1 este încălzit mai întîi izobar pînă la volumul $V_3 = 3 \text{ m}^3$ și apoi izocor pînă la presiunea $p_3 = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, să se determine :

2. Variația energiei interne între stările (p_1, V_1) și (p_3, V_3) .
3. Lucrul mecanic efectuat de gaz în acest proces.
4. Căldura absorbită de gaz ($C_V = 5R/2$).

C. La bornele unui receptor cu rezistența 2Ω este legată o sursă electrică cu rezistența interioară $0,3 \Omega$ și t.e.m. de 130 V . Conductoarele de legătură au fiecare rezistența de $0,15 \Omega$. Să se determine :

1. Căderea de tensiune pe linia de alimentare.
2. Tensiunea la bornele sursei.
3. Se consideră un conductor lung, liniar, străbătut de un curent de valoarea celui care alimentează receptorul. Conductorul este plasat într-un cîmp magnetic uniform cu $B_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, în vid, normal pe liniile de cîmp magnetic. Să se descrie poziția punctelor pentru care cîmpul magnetic rezultat este nul ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$).

D. Subiecte teoretice :

1. Să se enunțe principiul fundamental al dinamicii, să se scrie ecuația lui și să se definească unitatea de măsură a forței.

2. Să se scrie formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor și să se precizeze semnificația fiecărei mărimi fizice din această formulă.

3. Să se scrie expresia forței de interacțiune între două conductoare paralele, rectilinii și lungi, parcurse de curentul electric și să se definească unitatea de măsură a curentului electric.

(Admitere treapta a II-a, licee profil matematică-fizică, 1983)

I.15. A. O baterie de curent continuu cu t.e.m. $E = 12 \text{ V}$ și de rezistență interioară neglijabilă alimentează un circuit format din rezistorul R_1 legat în serie cu două rezistoare având rezistențele $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, montate în paralel. Să se determine :

1. Valoarea rezistenței R_1 când prin circuit trece curentul total $I_1 = 2 \text{ A}$.

2. Intensitățile curenților prin rezistoarele R_2 și R_3 .

3. Energia care se dezvoltă în rezistoarele R_2 și R_3 în timp de 30 minute.

B. Un corp de masă $m = 10 \text{ kg}$ așezat pe un plan orizontal este tras de o forță care formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Să se afle această forță știind că corpul se mișcă orizontal cu accelerația $a = 1,34 \text{ m/s}^2$ și coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,27$.

C. Cum trebuie deplasat un conductor într-un câmp magnetic uniform pentru ca la capetele lui să nu apară tensiune electromotoare?

D. Subiecte teoretice :

1. Acțiunea câmpului magnetic asupra curentului electric. Forța electromagnetică.

2. Ciocnirea plastică.

(Admitere treapta a II-a, licee profil electrotehnic, 1983)

I.16. A. Legea mișcării rectilinii a unui corp este dată de ecuația $x = 5 + 3t + 2t^2$. Să se scrie legea vitezei și să se reprezinte grafic.

B. Un tren cu masa $m = 1000 \text{ t}$ își mărește viteza de la $v_1 = 54 \text{ km/h}$ la $v_2 = 72 \text{ km/h}$ într-un timp $\Delta t = 1 \text{ minut}$ și 40 secunde.

1. Știind forța de tracțiune a locomotivei $F_t = 80 \text{ kN}$, să se afle forța de rezistență și coeficientul de frecare.

2. Să se determine lucrul mecanic al forței de tracțiune și puterea medie dezvoltată în acest interval Δt ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

C. Fie rețeaua din figura I.16.C la care se cunosc : $E_1 = 48 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$. Să se determine :

1. Curenții I_1 , I_2 , I_3 .

2. Să se interpreteze valorile obținute.

3. Condiția ca prin R_3 să nu circule curent.

D. Subiecte teoretice :

1. Conservarea energiei mecanice : (a) în mișcarea de cădere liberă, (b) în mișcarea oscilatorie armonică.

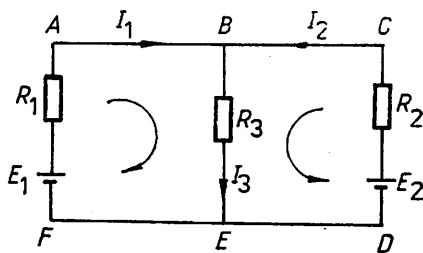


Fig. I.16.C

2. Legea transformării izocore : deducerea experimentală, exprimarea în scara Celsius și Kelvin, reprezentarea grafică, aplicarea principiului întâi al termodinamicii în această transformare.

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, 1984)

I.17. A. O placă pătrată omogenă este împărțită în patru pătrate. Se taie și se înlătură un pătrat. Să se determine poziția centrului de greutate a porțiunii rămase. Latura pătratului este $l = 1$ m.

B. Într-un conductor rectiliniu, lung de 0,3 m, deplasat cu viteza de 2 m/s, perpendicular pe liniile unui câmp magnetic uniform, se induce o t.e.m. de 3 V. Ce inducție magnetică are câmpul? Ce curent va circula prin conductor, dacă el are o rezistență de 0,6 Ω , iar între capetele lui se leagă un rezistor de 9 Ω ?

C. Subiecte teoretice :

1. Energia cinetică a punctului material.
2. Legile lui Kirchhoff.

(Admitere treapta a II-a, licee industriale, județul Sibiu, 1984)

I.18. A. O șină de cale ferată cu lungimea $l = 10$ m și cu masa $m = 900$ kg este ridicată cu două frînghii paralele. Să se determine tensiunile în frînghii, dacă una din ele este fixată la un capăt al șinei, iar cealaltă la distanța $d = 1$ m de celălalt capăt.

B. Gheața artificială se poate obține răcind apa cu ajutorul eterului care se vaporizează. Cît eter trebuie să vaporizăm ca să obținem 10 kg gheață din apă cu temperatura de 10°C? Se dau : $\lambda_{\text{eter}} = 355,3$ kJ/kg, $c_{\text{apă}} = 4181$ J/kg·K, $\lambda_g = 34 \cdot 10^4$ J/kg.

C. Un solenoid cu 1 000 spire și lungimea de 40 cm este parcurs de un curent de 10 A. Ce secțiune are, dacă fluxul magnetic prin suprafața unei spire este de $2 \cdot 10^{-5}$ Wb?

D. Subiecte teoretice :

1. Legea lui Arhimede.
2. Legea transformării izobare (Gay-Lussac).

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, județul Sibiu, 1984)

I.19. A. O săniuță lansată în sus de-a lungul unui plan înclinat, care formează unghiul $\alpha = 45^\circ$ cu orizontala, revine înapoi la baza planului astfel încît timpul de coborîre este de $n = 1,1$ ori mai mare decît timpul de urcare. Care este coeficientul de frecare la alunecare între săniuță și planul înclinat?

B. Într-un tub vidat, un electron pătrunde cu viteza $v_0 = 4 \cdot 10^7$ m/s perpendicular pe liniile cîmpului electric dintre armăturile unui condensator plan cu lungimea $x_1 = 4$ cm, distanța dintre plăci $d = 1,6$ cm, avînd aplicată tensiunea $U = 910$ V. Să se afle deviația y a electronului față de direcția inițială, măsurată pe un ecran fluorescent aflat la distanța $x_2 = 10$ cm de extremitatea plăcilor condensatorului, perpendicular pe ele. Se dau : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

C. Subiecte teoretice :

1. Energia cinetică a punctului material.
2. Forța de dilatare.
3. Definiți legile lui Kirchhoff.

(Admitere treapta a II-a, licee profil electrotehnic, București, 1984)

I.20. A. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 15$ m fără viteză inițială. În același timp, de la sol este aruncat vertical în sus un al doilea corp cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s. După cât timp și la ce înălțime deasupra solului se întâlnesc corpurile? ($g = 9,8$ m/s²).

B. Într-o butelie se află azot la temperatura $T_1 = 300$ K și presiunea $p_1 = 1,5 \cdot 10^7$ N/m². Din butelie s-a consumat azot pentru o experiență. La temperatura $T_2 = 280$ K, presiunea gazului este $p_2 = 0,6 \cdot 10^7$ N/m², iar masa buteliei cu gaz s-a micșorat cu $\Delta m = 3,2$ kg. Să se determine:

1. Numărul de kilomoli de azot în starea inițială.

2. Masa de azot rămasă în butelie ($\mu = 28$ kg/kmol).

C. Subiecte teoretice:

1. Conservarea energiei mecanice.

2. Căldura specifică.

3. Legea lui Ohm.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil mecanic, București, 1984)

I.21. A. Un corp cu masa $m = 50$ kg este urcat cu viteză constantă pe un plan înclinat care face unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Coeficientul de frecare între corp și plan fiind $\mu_1 = 0,2$, să se determine:

1. Forța de tracțiune care acționează asupra corpului.

2. Energia potențială pe care o are corpul după ce a parcurs distanța $l = 10$ m.

3. Energia cinetică pe care o va avea corpul la baza planului dacă este lăsat să alunece liber pe plan de la distanța $l = 10$ m.

4. Lucrul mecanic al forței de frecare pe distanța parcursă pe planul orizontal până la oprire, dacă coeficientul de frecare pe planul orizontal, pe care își continuă mișcarea după ce coboară de pe planul înclinat, este $\mu_2 = 0,4$ ($g = 10$ m/s²).

B. 1. Un încălzitor electric absoarbe de la rețeaua de alimentare o putere $P = 400$ W. Ce rezistență are încălzitorul dacă intensitatea curențului ce-l străbate este $I = 2$ A?

2. Ce masă de gheață cu temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ se poate transforma în vapori la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ cu căldura dezvoltată de încălzitor în timp de o oră ($\lambda_v = 334$ kJ/kg, $c_a = 4180$ J/kg · K, $\lambda_g = 2250$ kJ/kg)?

C. Subiecte teoretice:

1. Arătați semnificația fizică a relațiilor:

$$(a) E = mv^2/2; (b) Q = mc\Delta t; (c) e = -\Delta\Phi/\Delta t.$$

2. Arătați semnificația fizică a mărimii notate cu v (relația (a)) și o caracterizați.

3. Enunțați legea exprimată de relația (c).

(Admitere treapta a II-a, licee cu profil industrial, județul Prahova, 1984)

I.22. A. Un corp cu masa $m = 2$ kg coboară fără frecare pe un plan înclinat de înălțime $h = 1$ m. Ajungând la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafață orizontală până într-un punct C , parcurgând distanța $d = 0,5$ m (fig. I.22.A). Coeficientul de frecare pe suprafața orizontală este $\mu = 0,3$. Din punctul C corpul urcă fără frecare pe o suprafață curbă CD . Să se calculeze:

1. Viteza corpului la baza planului înclinat.

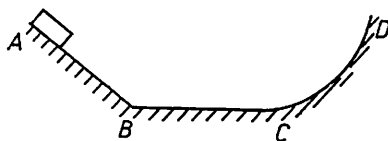


Fig. I.22.A

2. Viteza corpului în punctul C .
3. Înălțimea la care urcă corpul pe suprafața CD .
4. Distanța la care se oprește corpul față de punctul C . Se va lucra cu $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

B. Un încălzitor electric are două rezistoare. Timpul de fierbere a cantității de apă din încălzitor este t_1 , respectiv t_2 , după cum se conectează numai primul rezistor sau numai al doilea.

Să se calculeze timpul de fierbere al apei dacă se conectează ambele rezistoare : (1) în serie ; (2) în paralel. Să se specifice avantajul și dezavantajul fiecăreia din grupări.

C. 1. O bobină cu $N_1 = 20$ spire, secțiunea $S_1 = 2 \text{ cm}^2$ și lungimea $l_1 = 2 \text{ cm}$ este introdusă coaxial într-o a doua bobină la mijlocul ei. A doua bobină are $N_2 = 1\,000$ spire, lungimea $l_2 = 20 \text{ cm}$ și prin ea circulă un curent $I_2 = 10 \text{ A}$. În cât timp trebuie să scadă la zero intensitatea curentului din a doua bobină pentru ca în prima să se inducă t.e.m. $e_1 = 1 \text{ V}$?

2. Cu prima bobină se realizează un circuit care în condițiile problemei este parcurs de un curent de 10 mA . Ce rezistență are acest circuit?

D. Subiecte teoretice :

1. Să se definească mișcarea circulară uniformă și să se deducă expresia accelerației normale.

2. Să se scrie formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare și să se precizeze semnificația fiecărei mărimi care intervine în această formulă.

3. Să se definească forța electromagnetică și unitatea de măsură a intensității curentului electric.

(Admitere treaptă a II-a, licee profil matematică-fizică, 1984)

I.23. A. Un om deplasează pe o suprafață orizontală pe distanța $d = 10 \text{ m}$ o ladă cu masa $m = 100 \text{ kg}$. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafața pe care se deplasează este $\mu = 0,4$. Forța de tracțiune are direcție orizontală ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Se presupune că lada are accelerația $a = 0,5 \text{ m/s}^2$. Să se calculeze :

1. Lucrul mecanic efectuat de om asupra lăzii.
2. Lucrul mecanic al forței de frecare.
3. Lucrul mecanic total efectuat asupra lăzii.

B. O cantitate $\nu = 2 \text{ kmol}$ de dioxid de carbon este încălzită la presiune constantă cu $\Delta T = 50 \text{ K}$. Să se afle :

1. Variația energiei interne ΔU a gazului.
 2. Lucrul mecanic efectuat de gaz.
 3. Căldura Q_p absorbită.
- Se cunoaște $C_p = 4R$, $R = 8\,310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$.

C. Subiecte teoretice :

1. Mișcarea circulară uniformă.
2. Enunțați principiile termodinamicii.

(Admitere treaptă a II-a, licee profil industrial, județul Buzău, 1985)

I.24. A. O macara ridică un corp cu masa $m = 300 \text{ kg}$ la înălțimea $h = 5 \text{ m}$. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de macara în cazurile următoare :

1. corpul este ridicat cu viteză constantă ;
2. corpul este ridicat cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Se va folosi $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. O bobină are 100 spire, lungimea de 40 cm și secțiunea de 10 cm^2 . Cu ce viteză trebuie să varieze intensitatea curentului prin bobină pentru ca în ea să apară o t.e.m. autoindusă de 1 V? Dar dacă în bobină se introduce un miez de oțel cu $\mu_r = 100$? Se dă $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$.

C. Subiecte teoretice :

1. Să se enunțe principiile mecanicii newtoniene.
2. Să se scrie, să se enunțe și să se indice semnificația fiecărei mărimi fizice care intervine în legile lui Kirchhoff pentru circuitele electrice.

(Admitere treapta a II-a, licee profil mecanic, județul Vâlcea, 1985)

I.25. A. Un corp pornește din repaus, se deplasează cu o mișcare accelerată și atinge după un timp $t = 0,5$ minute o viteză de 6 m/s . Care a fost accelerația corpului?

B. Un corp cu sarcina $q = 10^{-2} \text{ C}$ se plasează în câmpul creat de o sarcină punctiformă Q în aer, într-un punct A situat la distanța $r_A = 1 \text{ m}$ și este mișcat pînă într-un punct B situat la distanța $r_B = 1,2 \text{ m}$ de sarcina Q . Lucrul mecanic efectuat este $3 \cdot 10^4 \text{ J}$. Să se afle :

1. Sarcina electrică Q .
2. Diferența de potențial dintre punctele A și B .

C. Subiecte teoretice :

1. Enunțați principial fundamental al dinamicii.
2. Scrieți legile lui Kirchhoff și specificați semnificația mărimilor fizice care intervin.
3. Definiți temperatura.

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, județul Timiș, 1985)

I.26. A. Un corp este lansat de-a lungul unui plan orizontal cu viteză inițială $v_0 = 4,9 \text{ m/s}$. Coeficientul de frecare la alunecare între corp și plan este $\mu = 0,2$. Să se afle :

1. Accelerația corpului.
2. Timpul pînă la oprire.
3. Distanța parcursă ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

B. Două corpuri punctiforme, cu sarcinile $+Q$ și respectiv $+2Q$, se găsesc în vid la distanța r unul de altul.

1. La ce distanță de primul corp, pe linia ce unește cele două corpuri, trebuie să se afle un al treilea corp, cu sarcina $-Q$, pentru a fi în echilibru?

2. În ce punct intensitatea câmpului electric este nulă?

3. Dacă cele două corpuri au sarcinile electrice $+Q$ și $-nQ$, în ce punct de pe segmentul ce le unește, potențialul este nul?

C. Subiecte teoretice :

1. Să se indice expresiile timpului de urcare și înălțimii maxime atinse de un corp aruncat pe verticală de jos în sus.
2. Să se scrie ecuația Mendeleev-Clapeyron, arătînd semnificația fizică a mărimilor care intervin.

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrial, București, 1985)

I.27. A. Un corp cu masa $m = 500 \text{ kg}$ este ridicat la înălțimea $h = 4 \text{ m}$. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune în următoarele cazuri :

1. Corpul este ridicat cu viteză constantă.
2. Corpul este ridicat cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

B. Un circuit alimentat de o sursă electrică de curent continuu cuprinde rezistențele $R_1 = 10 \Omega$ și $R_2 = 15 \Omega$ legate în paralel. Cunosând intensitatea curentului principal $I = 10 \text{ A}$, se cere să se calculeze :

1. Rezistența echivalentă a celor două rezistoare legate în paralel.
2. Tensiunea la bornele circuitului.
3. Energia electrică consumată în 5 minute.

C. Subiecte teoretice :

1. Ecuația Clapeyron-Mendeleev ; ecuația de stare a gazului ideal.
2. Să se scrie, indicând semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin în expresia inducției magnetice, pentru un curent electric rectiliniu, în centrul unei spire și în interiorul unui solenoid.

(Admitere treapta a II-a, licee profil electrotehnic, județul Bacău, 1985)

I.28. A. Un vagon cu masa $m_1 = 10 \text{ t}$ pornește pe o cale ferată orizontală cu viteza inițială $v_0 = 10 \text{ m/s}$. După 10 s , când el are viteza $v = 9 \text{ m/s}$, se ciocnește și se cuplează cu un al doilea vagon cu masa $m_2 = 20 \text{ t}$ aflat în repaus. Să se calculeze :

1. Viteza vagoanelor cuplate după ciocnire.
2. Căldura degajată la ciocnire.
3. Distanța parcursă de vagoane din momentul cuplării pînă la oprire ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

B. Într-un laborator sint folosite două băi identice pentru electro-liză avînd fiecare rezistența 2Ω . Să se determine :

1. Rezistența echivalentă a grupării serie (R_s) și a grupării paralel (R_p).
2. Ce rezistență internă ar trebui să aibă un generator care alimentînd succesiv cele două grupări să producă în circuitul exterior aceeași putere ?
3. Cum trebuie grupate cele două băi pentru ca depunerea unei anumite cantități de substanță să se facă mai repede ?

C. Subiecte teoretice :

1. Să se enunțe : (a) legea Arhimede ; (b) principiul I al termodinamicii.
2. Să se deducă : (a) relația R. Mayer ; (b) expresia vitezei termice a moleculelor unui gaz ideal.
3. Să se scrie și să se precizeze semnificația fiecărei mărimi fizice care intervine în : (a) legea atracției universale ; (b) legea inducției electromagnetice.

(Admitere treapta a II-a, licee matematică-fizică, 1985)

I.29. A. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de unghi $\theta = 30^\circ$ trebuie aplicată o forță minimă în sus, de-a lungul planului, $F_1 = 3 \text{ N}$, iar pentru a-l trage uniform în sus, de-a lungul planului este

necesară o forță în sus, de-a lungul planului, $F_2 = 7 \text{ N}$. Să se determine :

1. Forța de frecare între corp și planul inclinat.
2. Masa corpului și coeficientul de frecare dintre acesta și planul inclinat.

3. Accelerația minimă cu care trebuie să se deplaseze planul inclinat pentru ca să se observe o mișcare uniformă a corpului, în sus de-a lungul planului inclinat, în prezența frecării, dar în absența vreunei forțe suplimentare de tipul forțelor F_1, F_2 .

Se va lua $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. Legind mai întâi în serie, apoi în paralel, un fierbător electric de rezistență $R_f = 5 \Omega$ și un vas de electroliză cu soluție de azotat de argint avind rezistența electrică $R_e = 20 \Omega$ la bornele unei surse de curent continuu, se constată că — în ambele cazuri — la catodul vasului de electroliză se depune în durata $t = 10$ minute o aceeași cantitate de argint, de masă $m = 3,354 \text{ g}$. Știind că energia disipată sub formă de căldură de fierbător, în aceeași durată, în cazul legării în serie este $W_s = 75 \text{ kJ}$, să se determine :

1. Intensitatea curentului electric prin fierbător în cazul legării în serie.

2. Echivalentul electrochimic și masa atomică a argintului.

3. Rezistența internă și tensiunea electromotoare a sursei.

Se dau : valența argintului $n = 1$ și numărul lui Faraday $F = 96\,400 \text{ C/echivalent-gram}$.

C. 1. Să se enunțe și să se scrie legea lui Newton a atracției universale, indicind denumirile mărimilor fizice care intervin.

2. Să se deducă ecuația termică de stare și ecuația calorică de stare a gazului ideal, pornind de la formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare și de la expresia energiei cinetice medii a unei molecule în mișcarea de translație, dată de interpretarea cinetico-moleculară a temperaturii.

3. Să se enunțe regula lui Lenz a inducției electromagnetice.

(Admitere treaptă a II-a, 1986)

I. Subiecte date la examen 119-131

REZOLVĂRI 132-151

I.1. A. Mișcările fiind rectilinii uniforme, se poate scrie: $x_1 = v_1 t_1$, $x_2 = v_2 t_2$. Alegem originea timpului în momentul cînd pornește primul curier. Din $t_2 = t_1 - \Delta t$ și $x_1 = x_2$ se obține $v_1 t_1 = v_2(t_1 - \Delta t)$, de unde $t_1 = v_2 \Delta t / (v_2 - v_1) = 7$ h (timpul de la plecarea primului curier pînă cînd este ajuns de al doilea curier).

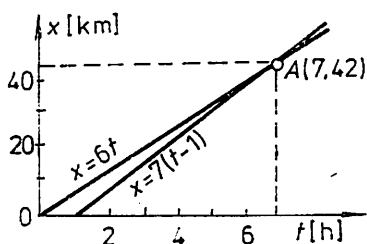


Fig. I.1.A

Distanța de la locul de plecare pînă la punctul unde al doilea curier ajunge pe primul este $x_1 = x_2 = v_1 t_1 = 42$ km.

Reprezentarea grafică a legii de mișcare pentru cei doi curieri este dată în figura I.1.A.

B.1. Frecvența mișcării oscilatorii este $\nu = n/t = 2,5$ Hz. Pulsatia oscilațiilor este $\omega = 2\pi\nu = 5\pi$ s⁻¹.

2. Ecuația mișcării oscilatorii se scrie $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Expri-mînd faza inițială în radiani, obținem: $y = 0,05 \sin(5\pi t + \pi/12)$ m.

3. Folosim expresiile pentru energia cinetică, energia potențială și energia totală a oscilatorului liniar armonic: $E_c = (m/2) \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = (1/2) k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$, $E_p = (1/2) k y^2 = (1/2) k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$, $E_t = E_c + E_p = (1/2) k A^2$.

Avem: $E_c/E_p = (E_t - E_p)/E_p$, adică $E_c/E_p = (A/y)^2 - 1$. Pentru $y = A/2$ se obține $E_c/E_p = 3$.

C. Se trasează graficul din figura I.1.C în care s-au făcut notațiile: M punctul corespunzător echilibrului termic, Q_1 căldura primită de apa rece, $Q_1 = m_1 c(\theta - t_1)$, Q_2 căldura cedată de apa caldă, $Q_2 = m_2 c(t_2 - \theta)$. La echilibru termic avem: $Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow m_1 c(\theta - t_1) = m_2 c(t_2 - \theta)$, de unde $m_2 = m_1(\theta - t_1)/(t_2 - \theta)$. Înlocuind datele din problemă se obține $m_2 = 2,5$ kg, adică volumul de apă necesar este $V_2 = 2,5$ l ($\rho_{\text{apă}} = 10^3$ kg/m³).

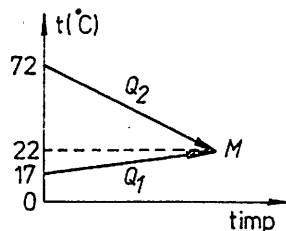


Fig. I.1.C

I.2. A. 1. Mișcarea avînd loc pe o suprafață orizontală cu frecare, asupra fiecărui corp va acționa o forță de frecare $F_{fi} = \mu m_i g$, $i = 1, 2$, care se opune mișcării. Din $m_1 a = -\mu m_1 g$ se obține accelerația de frînare: $a = -\mu g$. Alegem originea

spațiului în punctul din care pleacă corpul de masă m_1 (fig. I.2.A); ecuațiile de mișcare pentru cele două corpuri se scriu :

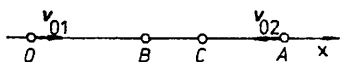


Fig. I.2.A

$$x_1 = v_{01}t + at^2/2 \quad (1)$$

$$x_2 = d - (v_{02}t + at^2/2). \quad (2)$$

În momentul întâlnirii corpurilor în punctul B avem $x_1 = x_2$. Pentru acest moment, din (1) și (2) se obține timpul pînă la ciocnire :

$$t_{1,2} = \frac{-(v_{01} + v_{02}) \pm \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 + 4ad}}{2a}.$$

Făcînd înlocuirile se obține $t_1 = 2,5$ s și $t_2 = 22,5$ s. Soluția $t_2 = 22,5$ s nu este acceptabilă deoarece primul corp se oprește după $t_{01} = -v_{01}/a = 10$ s, iar al doilea după $t_{02} = -v_{02}/a = 15$ s de la începerea mișcării.

2. Ciocnirea fiind plastică, are loc conservarea impulsului

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v. \quad (3)$$

Vitezele v_1 și v_2 ale corpurilor înainte de ciocnire se calculează din legea vitezei : $v_1 = v_{01} + at_1 = 15$ m/s, $v_2 = v_{02} + at_1 = 25$ m/s. Deoarece $m_1v_1 > m_2v_2$, corpul rezultat în urma ciocnirii plastice se va deplasa în sensul de mișcare al primului corp și ecuația (3) se scrie : $m_1v_1 - m_2v_2 = v(m_1 + m_2)$, de unde $v = (m_1v_1 - m_2v_2)/(m_1 + m_2) = 7$ m/s.

Corpul rezultat prin ciocnirea plastică execută o mișcare rectilinie uniform încetinită de la B spre A cu viteza inițială $v = 7$ m/s și aceeași accelerație $a = -\mu g$. Ecuațiile mișcării corpului rezultat sînt (alegem noua origine a timpului în momentul ciocnirii) :

$$x = x_B + vt + at^2/2, \quad v_f = v + at. \quad (4)$$

Timpul pînă la oprire (în punctul C) se obține din (4) punînd $v_f = 0$; avem $t_0 = -v/a = 3,5$ s. Spațiul străbătut de corpuri după ciocnirea plastică pînă la oprire este : $BC = x_C - x_B = vt_0 + at_0^2/2 = -v^2/2a = 12,25$ m.

3. În timpul ciocnirii plastice o parte din energia cinetică totală se transformă în căldură. Avem :

$$\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \right) = -1280 \text{ J}.$$

B.1. Legea mișcării oscilatorii armonice este $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Prin identificare se obține $A = 0,1$ m, $\omega = (\pi/8) \text{ s}^{-1}$, $\varphi = \pi/8$. Din $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ și $\omega = \pi/8$ rezultă $T = 16$ s, $\nu = 0,0625$ Hz.

2. Din ecuația vitezei $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$ se obține $v = v_{\max}$ pentru $\cos(\omega t + \varphi) = 1$; avem $v_{\max} = \omega A = 0,03925$ m/s. Analog, din ecuația accelerației $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$ se obține $a_{\max} = -\omega^2 A \simeq -0,0154 \text{ m/s}^2$.

3. Ecuația elongației scrisă în cele două puncte este : $y_1 = A/2$, $y_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi)$ și $y_2 = \sqrt{3}A/2$, $y_2 = A \sin(\omega t_2 + \varphi)$. Obținem ecuațiile trigonometrice : $\sin(\omega t_1 + \varphi) = 1/2$ și $\sin(\omega t_2 + \varphi) = \sqrt{3}/2$ care ne dau $t_1 = 1/3$ s și $t_2 = 5/3$ s. Timpul necesar punctului material să străbată distanța dintre cele două puncte considerate este $\Delta t = t_2 - t_1 = 4/3$ s.

C. Dacă γ este coeficientul de dilatare termică în volum al oțelului atunci variația volumului pentru cele două piese se scrie : $\Delta V_1 = \gamma V_{01} \Delta t_1$,

$\Delta V_2 = \gamma V_{02} \Delta t_2$, unde V_{01} și V_{02} sînt volumele pieselor înainte de încălzire. Din $\Delta V_1 = \Delta V_2$ se obține: $V_{01} \Delta t_1 = V_{02} \Delta t_2$ (1).

Cantitățile de căldură primite de cele două piese sînt:

$$Q_1 = m_1 c \Delta t_1 = \rho V_{01} c \Delta t_1, \quad Q_2 = m_2 c \Delta t_2 = \rho V_{02} c \Delta t_2, \quad (2)$$

unde c este căldura specifică a oțelului, iar ρ este densitatea oțelului înainte de încălzire. Înmulțind relația (1) cu ρc și folosind (2) se obține $Q_1 = Q_2$.

I.3. A. Folosim notațiile din figura I.3.A. Considerind corpurile m_A și m_B ca puncte materiale, avem $h = l$. Alegem ca nivel zero pentru energia

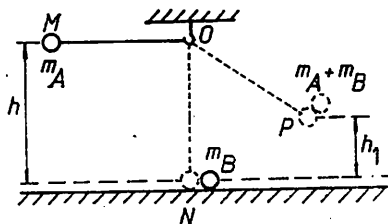


Fig. I.3.A

potențială suprafața orizontală dată. Viteza corpului m_A în punctul N (cel mai de jos al traiectoriei), înainte de ciocnire, se determină din legea conservării energiei. În punctul M energia totală a corpului m_A este formată numai din energia potențială: $E_i(M) = m_A g h$; în punctul N corpul m_A are energia potențială egală cu zero și $E_i(N) = m_A v_A^2 / 2$. Din $E_i(M) = E_i(N)$ se obține

$$v_A = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

1. În cazul ciocnirii plastice în punctul N , are loc conservarea impulsului: $m_A v_A = (m_A + m_B) v$, cu v viteza sistemului format din corpurile m_A și m_B după ciocnirea plastică. Avem

$$v = m_A v_A / (m_A + m_B). \quad (2)$$

Înălțimea h_1 la care urcă sistemul de corpuri $m_A + m_B$ se obține din legea conservării energiei mecanice scrisă pentru punctele N și P : $(m_A + m_B) v^2 / 2 = (m_A + m_B) g h_1$, de unde se obține $h_1 = v^2 / 2g$ sau, folosind (2) și (1): $h_1 = (m_A / (m_A + m_B))^2 h = 2,5$ m.

2. În cazul ciocnirii elastice au loc conservarea impulsului și a energiei cinetice

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B, \quad (3)$$

$$\frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{m_A v'^2_A}{2} + \frac{m_B v'^2_B}{2}, \quad (4)$$

unde v_A este dat de (1), iar $v_B = 0$. Prin rezolvarea sistemului (3), (4) se obține

$$v'_B = 2m_A v_A / (m_A + m_B). \quad (5)$$

După ciocnirea elastică corpul B se deplasează rectiliniu uniform încetinit, cu accelerația $a = -\mu g$ și viteza inițială v'_B dată de (5). Durata mișcării pe suprafața orizontală și spațiul parcurs de corpul B după ciocnirea elastică se calculează din legile mișcării uniform variate cu $a < 0$:

$$\begin{cases} s = v'_B t + \frac{at^2}{2} \\ v_f = v'_B + at \\ v_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{v'^2_B}{2\mu g} \\ t = \frac{v'_B}{\mu g} \end{cases}$$

sau, folosind (5) și (1) :

$$t = \frac{2m_A}{m_A + m_B} \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{\mu g} = \frac{50}{7} \text{ s}; \quad s = 4 \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right)^2 \frac{h}{\mu} = 50 \text{ m.}$$

B. Circuitul de curent alternativ este format dintr-o bobină reală sub tensiune, caracterizată prin rezistență și inductanță, străbătute de același curent, constituind un circuit de curent alternativ serie R, L (fig. I.3.B). Din $u = U_{\max} \sin \omega t = 120\sqrt{2} \sin 100 \pi t$ se obține prin identificare : $U_{\max} = 120\sqrt{2} \text{ V}$, $\omega = 100 \pi \text{ s}^{-1}$, $U = U_{\max}/\sqrt{2} = 120 \text{ V}$.

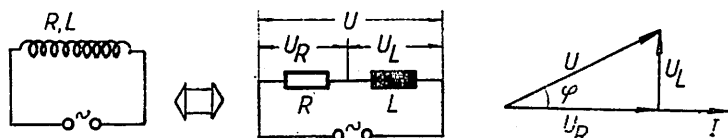


Fig. I.3.B

1. Aplicăm expresiile pentru puterea activă și puterea reactivă, precum și legea lui Ohm în curent alternativ : $P = UI \cdot \cos \varphi$, $P_r = UI \sin \varphi$, $I = U/\sqrt{R^2 + X_L^2}$. Din reprezentarea fazorială a circuitului RL serie (fig. I.3.B) se observă că $U \cdot \cos \varphi = U_R = IR$ și $U \cdot \sin \varphi = U_L = IX_L$, astfel că :

$$P = RI^2, \quad (1)$$

$$P_r = X_L I^2, \quad (2)$$

$$I = U/\sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (3)$$

Relațiile (1) și (2) ne dau

$$P/P_r = R/X_L \quad (4)$$

iar din (1) și (3) se obține

$$P/R = U^2/(R^2 + X_L^2). \quad (5)$$

Înlocuind datele din problemă în relațiile (4) și (5) se obține sistemul $R = \sqrt{3}X_L$, $R^2 + X_L^2 = 80 R$, cu soluția $R = 60 \Omega$ și $X_L = 20\sqrt{3} \Omega$. Din $X_L = \omega L$ și $\omega = 100 \pi$ rezultă $L = \sqrt{3}/5 \pi = 0,11 \text{ H}$.

2. Impedanța bobinei este : $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 40\sqrt{3} \Omega \approx 69,3 \Omega$.

Într-un circuit serie RL în curent alternativ, curentul este defazat în urma tensiunii cu un unghi φ dat de $\tan \varphi = U_L/U_R = X_L/R$. Se obține $\tan \varphi = \sqrt{3}/3$, adică $\varphi = \pi/6$.

Din $i = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$ cu $I_{\max} = U_{\max}/Z$, avem $i = \sqrt{6} \sin(100 \pi t - \pi/6) \text{ A}$.

3. Circuitul nou este un circuit RLC serie în curent alternativ. Puterea activă primită de circuit este $P = UI \cos \varphi$. Această putere ia valoarea maximă $P_{\max}$ atunci când $\cos \varphi = 1$, adică $\varphi = 0$. Din $\tan \varphi = (X_L - X_C)/R = 0$ rezultă $X_L = X_C$, adică circuitul se află în regim de rezonanță. În acest caz $\omega L = 1/\omega C \Rightarrow C = 1/\omega^2 L = 5 \cdot 10^{-4}/\pi \sqrt{3} \text{ F} \approx 92 \mu \text{ F}$ și $P_{\max} = UI = U^2/R = 240 \text{ W}$.

I.4. A. Legea lui Ohm în curent alternativ se scrie : $I = U/Z$ cu Z impedanța circuitului RL serie : $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2}$. Făcînd înlocuirile cu datele din problemă se obține $I = 20/\sqrt{1 + 100 \pi^2} \approx 0,64 \text{ A}$.

B.1. Pendulul elastic este un oscilator liniar armonic cu elongația $y = A \sin \omega t$, unde $\omega = \sqrt{k/m} = 100 \text{ s}^{-1}$. Pentru elongația y_1 , din expresia impulsului $p_1 = mv_1$ și a elongației se obține $p_1 = m\omega A \cos \omega t_1$, $y_1 = A \sin \omega t_1 \Rightarrow y_1^2 + (p_1/m\omega)^2 = A^2 \Rightarrow A = 0,06 \text{ m}$. Legea de mișcare a pendulului elastic din problemă este: $y = 0,06 \sin 100 \pi t$.

2. Energia cinetică a oscilatorului liniar armonic într-un punct de elongație y_2 este $E_c = mv_2^2/2 = (1/2)m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t_2 = (1/2)m\omega^2 \cdot (A^2 - y_2^2) = 1,6 \text{ J}$. Energia potențială a oscilatorului liniar armonic în același punct de elongație y_2 este: $E_p = ky_2^2/2 = 0,2 \text{ J}$.

I.5. A. Mișcarea corpului pe planul înclinat fiind cu frecare, aplicarea principiului fundamental al dinamicii conduce la $a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, accelerația corpului la urcarea pe planul înclinat și $a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ accelerația corpului la coborîrea pe planul înclinat. Ecuațiile mișcării corpului dau:

$$\begin{aligned} & \text{— la urcare: } s_{\max} = v_0 t_u + a_1 t_u^2/2, \quad 0 = v_0 + a_1 t_u, \text{ de unde } s_{\max} = \\ & = -v_0^2/2a_1; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{— la coborîre: } s_{\max} = a_2 t_c^2/2, \quad v = a_2 t_c, \text{ de unde } v = \sqrt{2a_2 s_{\max}}. \quad (2)$$

Din (1), (2) și $v = 3v_0/4$ se obține $(\tan \alpha - \mu)/(\tan \alpha + \mu) = 9/16$ sau $\mu = 0,28 \cdot \tan \alpha = 0,28$.

Problema se poate rezolva și prin aplicarea teoremei variației energiei cinetice a corpului: variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al forței de frecare în timpul mișcării (urcare și coborîre pe planul înclinat), adică $mv^2/2 - mv_0^2/2 = -F_f \cdot 2s_{\max}$. Înlocuind $v = 3v_0/4$, $F_f = \mu mg \cos \alpha$ și $s_{\max} = v_0^2/2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, se obține $\mu = 0,28 \tan \alpha$.

B.1. Alegem un sistem de coordonate cu originea O în centrul de masă al corpului, axa Ox orizontală și axa Oy verticală, astfel încît planul xOy conține forța F (fig. I.5.B). Se poate considera că forța F se aplică în centrul de masă O al corpului. Corpul rămînînd în repaus, conform figurii I.5.B avem: $F_x \leq F_f$ (1) și $F_y + N = G$ (2). Înlocuind $F_f = \mu N$, $F_x = F \cos \alpha$ și $F_y = F \sin \alpha$, relațiile (1) și (2) conduc la $F \cos \alpha \leq \mu(mg - F \sin \alpha)$, de unde $F_M = \mu mg/(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)$ (3).

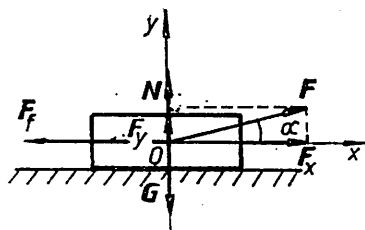


Fig. I.5 B.

2. Corpul este scos din repaus cînd $F \geq F_M$. Această forță se aplică corpului prin intermediul resortului care se va deforma elastic astfel că $F_M = -kx$, de unde $|x| = F_M/k$. Energia de deformare elastică a resortului este $E_p = kx^2/2 = F_M^2/2k$, cu F_M dat de (3).

C. Impedanța circuitului serie RLC este $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$ (1). La rezonanță, $v_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}$ (2), iar pentru frecvența $v = 1 \text{ kHz}$ reacția (1) se scrie: $10^3 = \sqrt{10^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$ (3). Din (2) și (3) se obține $L = \sqrt{1/111}/200 \pi = 0,053 \text{ H}$, $C = 1/8 \pi \cdot 10^4 \sqrt{1/111} = 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ F}$.

I.6. A. Deoarece corpul plutește, rezultă că forța arhimedică este egală cu greutatea corpului. Dacă V_1 este volumul porțiunii din corp cufundat în mercur, avem $\rho_1 V_1 g = mg$, de unde $V_1 = m/\rho_1 = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Volumul corpului este: $V = m/\rho = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

B. Forța de respingere electrostatică dintre sarcinile $Q_1 = Q_2 = Q$ este $F_e = Q^2/4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2$ (1), unde d este distanța dintre corpurile electrizate. La echilibru, rezultanta R a forței de respingere electrostatică și a greutateii (fig. I.6.B) este egală cu tensiunea în fir, astfel că direcția rezultantei coincide cu direcția firului și $\text{tg } \alpha = F_e/G = AP/OP = d/\sqrt{4l^2 - d^2}$, de unde $F_e = mgd/\sqrt{4l^2 - d^2}$ (2).

1. În cazul cind sferile se află în aer ($\epsilon_r = 1$), din (1) și (2) se obține :

$$Q = 2d \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mgd}{\sqrt{4l^2 - d^2}}} = 0,447 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

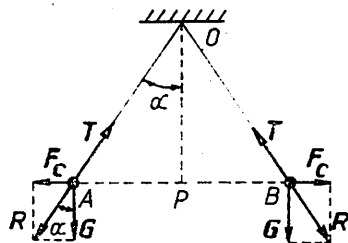


Fig. I.6.B

2. Dacă sferile încărcate cu sarcina Q se află în lichidul cu permitivitatea relativă $\epsilon_r > 1$, forța de respingere electrostatică se micșorează. Din relațiile (1) și (2), scrise pentru aer și pentru lichid, avem :

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{mgd}{\sqrt{4l^2 - d^2}} \text{ și } \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d_1^2} = \frac{mgd_1}{\sqrt{4l^2 - d_1^2}},$$

de unde

$$\epsilon_r = \left(\frac{d}{d_1}\right)^3 \sqrt{\frac{4l^2 - d_1^2}{4l^2 - d^2}} = 2,0256.$$

I.7. A. Fie $G = mg$ greutatea trenului. Forța de frinare este $F_f = G/n = mg/n$. Datorită acțiunii forței de frinare, mișcarea trenului este uniform încetinită cu accelerația dată de $F_f + ma = 0$, adică $a = -g/n$.

Timpul pînă la oprire se obține din legea vitezei pentru mișcarea uniform încetinită, impunînd condiția că viteza finală este egală cu zero, adică $t = -v_0/a = nv_0/g = 30,6 \text{ s}$.

Distanța parcursă de tren de la începutul frînării pînă la oprire este $d = -v_0^2/2a = nv_0^2/2g = 459,2 \text{ m}$.

B. Scriem legea lui Ohm pentru întregul circuit în cele două cazuri : $I_1 = E/(R_1 + r)$ și $I_2 = E/(R_2 + r)$. De aici se obține :

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} \approx 1,43 \Omega \text{ și } E = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2} \approx 34,3 \text{ V.}$$

I.8. A. Alegem un sistem de coordonate xOy cu axa verticală Oy avînd sensul pozitiv în jos și cu originea în punctul de unde cade corpul la momentul $t = 0$. Ecuațiile mișcării sînt : $v = gt$ și $y = h = gt^2/2$. Înlocuind datele din problemă se obține $v = 78,4 \text{ m/s}$ și $h = 313,6 \text{ m}$.

B. Lucrul mecanic efectuat prin ridicarea uniformă la înălțimea h a corpului este $L = F \cdot h = mgh$. Puterea pe care trebuie să o dezvolte motorul este $P = L/t$, adică $P = mgh/t = 784 \text{ W}$.

C.1. În circuitul de curent alternativ, bobina cu inductanță și rezistență formează un circuit RL serie și legea lui Ohm se scrie :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2}} = 0,64 \text{ A.}$$

2. În circuitul de curent continuu bobina se comportă numai ca o rezistență și legea lui Ohm se scrie : $I = U/R = 20 \text{ A}$.

I.9. A.1. Ciocnirea fiind perfect elastică, se aplică legile de conservare a impulsului și a energiei :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2},$$

în care $v_1 = 0$. Se obține : $v'_1 = 2m_2 v_2 / (m_1 + m_2) = 4 \text{ m/s}$, $v'_2 = (m_2 - m_1) v_2 / (m_1 + m_2) = 1 \text{ m/s}$, care ne arată că, după ciocnire, ambele corpuri se deplasează pe direcția și în sensul vitezei inițiale a corpului de masă m_2 .

2. După ciocnire asupra corpului de masă m_1 acționează forța de frecare $F_f = -\mu m_1 g$ și forța elastică a resortului $F_e = -kx$. Din teorema variației energiei cinetice aplicată corpului m_1 pentru momentele imediat după ciocnire și la oprire $m_1 v'^2_1 / 2 - 0 = \mu m_1 g x + kx^2 / 2$ se obține $\mu = (m_1 v'^2_1 - kx^2) / 2m_1 g x = 0,5$.

Spațiul de oprire al corpului m_2 , după ciocnire, este : $x_2 = -v'^2_2 / 2a = -v'^2_2 / 2\mu g = 0,1 \text{ m}$.

B. Firul fiind inextensibil, distanța dintre pistoane rămâne constantă, adică volumul gazului delimitat de cele două pistoane este constant în timpul încălzirii (transformare izocoră). Avem : $p_0/T = p_1/T_1$ sau $T_1/T = p_1/p_0$, de unde se obține $\Delta T/T = \Delta p/p_0$. Gazul din tub, delimitat de pistoane, poate fi încălzit până când tensiunea din fir este egală cu valoarea maximă; în acest caz presiunea gazului din tub este $p_1 = p_0 + F/S$. Deci $\Delta T = TF/Sp_0 = 60 \text{ K}$.

C. Asupra unei sarcini electrice în mișcare într-un câmp magnetic se exercită forța Lorentz $f = qv \times B$ de intensitate $f = qvB \sin \alpha$, unde α este unghiul dintre viteza sarcinii și direcția liniilor de câmp magnetic. Alegem un sistem de coordonate $Oxyz$ avind axa Ox de-a lungul direcției inducției magnetice B . Să presupunem că în momentul intrării în câmpul magnetic electronul are viteza v_0 în planul xOy , astfel încît unghiul dintre v_0 și B este $\beta = 45^\circ$. Viteza v_0 se poate descompune în două componente : $v_{0x} = v_0 \cos \beta$ și $v_{0y} = v_0 \sin \beta$. Deoarece de-a lungul axei Ox avem $v_{0x} \parallel B$, forța Lorentz este egală cu zero și prin urmare în lungul axei Ox (pe direcția lui B) mișcarea electronului este rectilinie și uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos \beta$. Componenta $v_{0y} = v_0 \sin \beta$ fiind perpendiculară pe B , asupra electronului va acționa forța Lorentz $f = ev_{0y}B = ev_0B \sin \beta$ și mișcarea va fi circulară uniformă în planul yOz . Din compunerea celor două mișcări rezultă pentru electron o mișcare elicoidală în lungul axei Ox .

2. Elementele traiectoriei elicoidale sînt : pasul elicei și raza.

Viteza cu care pătrunde electronul în câmpul magnetic se obține din legea conservării energiei : $|e|U = m_e v_0^2 / 2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2|e|U/m_e}$.

Raza mișcării circulare în planul yOz se obține din egalarea forței Lorentz cu forța centrifugă, adică :

$$|e|v_{0y}B = m_e v_{0y}^2 / R \Rightarrow R = \frac{m_e v_0 \cdot \sin \beta}{|e|B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e U}{|e|}} \sin \beta = 1,19 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Pasul elicei este distanța dintre două spire consecutive ale mișcării elicoidale, adică spațiul străbătut de electron în lungul axei Ox în timp

de o perioadă a mișcării circulare :

$$h = v_{0x}T = v_0 \frac{2\pi R}{v_0 \sin \beta} \cdot \cos \beta = 2\pi R \cdot \operatorname{ctg} \beta = 7,47 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

I.10. A. Ecuația de mișcare pentru căderea liberă este $h = gt^2/2$ (1). Copul al doilea execută o mișcare uniform accelerată cu viteza inițială v_{02} , astfel că $H = v_{02}t + gt^2/2$ (2). La momentul $t = t_c$ ambele corpuri ating solul. Din (1) se obține $t_c = \sqrt{2h/g}$, care înlocuit în (2) ne dă $v_{02} = (H - h) \sqrt{g/2h} = 7 \text{ m/s}$.

B. Din ecuația Clapeyron-Mendeleev avem $pV = mRT/\mu$, de unde $m = \mu PV/RT$. Înlocuind datele din problemă se obține $m_{\text{CO}_2} = 2 \text{ kg}$.

I.11. A. În mișcarea uniformă, forța de tracțiune a locomotivei este egală cu forța de frecare: $F_t = \mu Mg$ (1). După desprinderea vagonului, forța de tracțiune a locomotivei (care rămâne constantă) va învinge forța de frecare și va imprima trenului o mișcare accelerată, adică $(M - m)a_1 = F_t - \mu(M - m)g$ (2). Din relațiile (1) și (2) se obține $a_1 = \mu mg/(M - m)$ (3).

După desprindere, vagonul se va mișca încetinit, asupra lui acționând forța de frecare. Avem $ma_2 = -\mu mg$, de unde $a_2 = -\mu g$ (4). Ecuațiile pentru mișcarea vagonului după desprindere sînt: $x_1 = v_0t + a_2t^2/2$ și $v = v_0 + a_2t$. Din aceste ecuații, punind condițiile $x_1 = d$, $v = 0$ obținem timpul după care vagonul se oprește: $t_0 = \sqrt{2d/\mu g}$ (5), și viteza inițială a vagonului în momentul desprinderii de tren (egală cu viteza inițială a trenului înainte de desprinderea vagonului): $v_0 = \sqrt{2\mu g d}$ (6).

Pentru tren, după desprinderea vagonului, ecuația mișcării este: $x_2 = v_0t + a_1t^2/2$ (7). Distanța D străbătută de tren în timpul t_0 (pînă la oprirea vagonului) se obține din (7) folosind (3), (5) și (6): $D = v_0t_0 + md/(M - m)$. Distanța dintre tren și vagon, în momentul opririi vagonului, este $D - d = Md/(M - m) = 10 \text{ km}$.

B. Pistonul fiind mobil, presiunea în cilindru rămâne constantă.

1. Cantitatea de căldură absorbită de gaz este $Q = \nu C_p \Delta T = mC_p \Delta T/\mu$, adică $Q = 10387,5 \text{ J}$.

2. Transformarea fiind izobară, avem $V_2/V_1 = T_2/T_1 \Leftrightarrow (V_2 - V_1) : V_1 = (T_2 - T_1)/T_1 \Rightarrow \Delta V = V_1 \Delta T/T_1$ (1). Din ecuația Clapeyron-Mendeleev, scrisă pentru starea inițială $pV_1 = mRT_1/\mu$, în care $p = p_0 + G/S$ este presiunea gazului din cilindru, avem $V_1/T_1 = mR/\mu(p_0 + G/S)$ (2). Înlocuind (2) în (1) și avînd în vedere că $\Delta V = S\Delta x$, se obține $\Delta x = mR\Delta T/\mu(p_0 S + G) = 0,0296 \text{ m}$ (3).

Observație. Relația (3) poate fi obținută și altfel. Primind căldura Q gazul efectuează un lucru mecanic L și își mărește energia internă: $Q = \Delta U + L$. Înlocuind $Q = \nu C_p \Delta T$, $\Delta U = \nu C_v \Delta T$ și $L = p\Delta V$ se obține $\nu(C_p - C_v)\Delta T = p\Delta V$, sau folosind ecuația lui R. Mayer $C_p - C_v = R$, avem $\nu R\Delta T = p\Delta V$, de unde se obține imediat relația (3).

C.1. Fie E t.e.m. și r rezistența interioară a generatorului. Puterea produsă de generator prin rezistorul R este $P = RI^2$, cu I dat de legea lui Ohm aplicată la întregul circuit: $I = E/(R + r)$. Din egalitatea puterilor în cele două cazuri, se obține $R_1 E^2/(R_1 + r)^2 = R_2 E^2/(R_2 + r)^2$, de unde $r = \sqrt{R_1 R_2} = 12 \Omega$.

2. (a) Intensitățile maxime ale curenților suportați de cei doi rezistori sînt $I_{1\max} = U_{1\max}/R_1 = 1 \text{ A}$, $I_{2\max} = U_{2\max}/R_2 = 2 \text{ A}$. La legarea în serie, $R_s = R_1 + R_2 = 25 \text{ }\Omega$, iar curențul trebuie să aibă intensitatea maximă $I_{1\max} = 1 \text{ A}$ (în caz contrar rezistorul R_1 se arde). Puterea maximă care se poate obține la gruparea în serie a celor două rezistoare este $P_{s\max} = R_s I_{1\max}^2 = 25 \text{ W}$.

(b) La gruparea în paralel $R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 5,76 \text{ }\Omega$. Pentru calculul puterii vom folosi relația $P_{p\max} = U_{1\max}^2 / R_p = 14 \text{ W}$ (dacă tensiunea ar fi mai mare decît $U_{1\max} = 9 \text{ V}$, rezistorul R_1 s-ar arde).

I.12. A. La aruncare pe verticală de jos în sus, timpul de urcare este egal cu timpul de coborîre. Corpul revine pe pămînt după un timp $t = t_u + \downarrow t_c = 2t_u = 2\sqrt{2h/g} = 4 \text{ s}$.

B.1. Intensitatea cîmpului electric produs de corpul 2 în punctul unde se află corpul 1 este $E_{21} = Q_2 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2 = 7,2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$; analog $E_{12} = Q_1 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

2. Forța cu care corpul 1 acționează asupra corpului 2 este $F_{12} = = Q_1 Q_2 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2 = 14,4 \text{ N}$; analog $F_{21} = Q_2 Q_1 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2 = F_{12}$. Cele două forțe sînt egale și au sensuri opuse.

Observație. Să considerăm că axa xx' trece prin corpurile punctiforme și fie corpul punctiform 1 în originea O , iar corpul punctiform 2 în A pe axa Ox , aflat la distanța d de origine. Intensitatea cîmpului electric produs de cele două sarcini electrice într-un punct M situat între O și A este $E = |Q_1 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r x^2 - Q_2 / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r (d - x)^2|$, cu x abscisa punctului M . Intensitatea cîmpului electric este zero într-un punct M_1 situat între cele două sarcini, aflat la distanța x_1 de sarcina Q_1 , unde x_1 verifică relația $Q_1/x_1^2 = Q_2/(d - x_1)^2$, adică $x_1 = d\sqrt{Q_1}/(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})$.

I.13. A.1. Deoarece corpul se deplasează cu viteză constantă ($a = 0$), potrivit principiului fundamental al dinamicii, rezultanta forțelor ce acționează asupra corpului este nulă. Alegem un sistem de coordonate oxy cu originea O în centrul de masă al corpului (fig. I.5.B). Vom avea :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x - F_f = 0 \\ F_y + N - G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cos \alpha - \mu N = 0 \\ F \sin \alpha + N - G = 0. \end{cases}$$

Din acest sistem se obține : $F = \mu mg / (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 80 \text{ N}$.

2. Lucrul mecanic total efectuat de forțele care acționează asupra corpului pe distanța d este egal cu produsul dintre rezultanta componentelor forțelor pe direcția deplasării și mărimea deplasării, adică $L = (F_x - F_f) \cdot d = 0$.

Observații. Potrivit teoremei variației energiei cinetice, lucrul mecanic al forței rezultante este egal cu variația energiei cinetice a corpului : $L = E_{c_2} - E_{c_1} = 0$, deoarece $v = \text{const.}$

2. Lucrul mecanic efectuat de forța F asupra corpului este $L_0 = = F \cdot d \cos \alpha = 4152 \text{ J}$, iar lucrul mecanic al forței de frecare este $L_r = = -F_f \cdot d = -F_x \cdot d = -L_0$.

B. Să considerăm un plan normal la cele două conductoare. În acest plan liniile cîmpului magnetic creat de fiecare curent liniar sînt cercuri concentrice avînd centrul pe axa conductorului (fig. I.13.B). Sensul liniilor de cîmp este sensul în care trebuie rotit un burghiu, așezat de-a

lungul conductorului, pentru a înainta în sensul curentului electric (regula burghiului). Inducția magnetică într-un punct aflat la distanța r de curentul rectiliniu generator de cîmp magnetic este un vector tangent la linia de cîmp magnetic, avînd sensul dat de regula burghiului și mărimea $B = \mu_0 \mu_r I / 2\pi r$ (1).

1. Potrivit figurii I.13.B, inducția magnetică a cîmpului magnetic rezultat la jumătatea distanței dintre conductori este $B_p = B_1 + B_2$. În punctul P cei doi vectori sînt coliniari și de sens contrar, astfel că inducția magnetică rezultantă va avea sensul inducției magnetice create de curentul I_2 și mărimea $B_p = B_2 - B_1 = \mu_0(I_2 - I_1)/\pi d = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

2. În punctul Q inducțiile magnetice ale celor doi curenți sînt paralele și de același sens, astfel că $B_Q = B'_1 + B'_2 = \mu_0 I_1 / 2\pi d_1 + \mu_0 I_2 / 2\pi d_2 = 10^{-4}/3$ T.

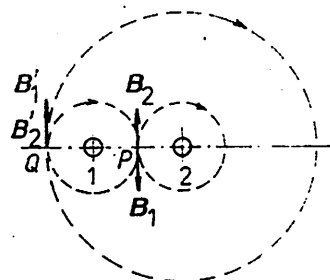


Fig. I.13.B

Observație. Inducția magnetică este egală cu zero într-un punct S situat între cei doi conductori la distanța x de curentul I_1 . În acest punct vectorii B_1 și B_2 sînt coliniari, de sens contrar și au mărimi egale, adică $B_S = 0 \Rightarrow \mu_0 I_1 / 2\pi x = \mu_0 I_2 / 2\pi (d - x)$, de unde $x = I_1 d / (I_1 + I_2) = 1/30$ m.

I.14. A.1. Mișcarea fiind uniform accelerată, fără viteză inițială, ecuațiile mișcării se scriu: $v = at$ și $x = at^2/2$. De aici se obține $x = v^2/2a = 82$ m.

2. Forța de tracțiune a motorului este folosită pentru învingerea forței de frecare și în scopul accelerării camionului, adică $F_t = F_f + ma$. Înlocuind forța de frecare $F_f = fmg$ se obține $F_t = m(fg + a) = 5\,010$ N.

3. Potrivit teoremei variației energiei cinetice, lucrul mecanic total efectuat asupra camionului în secunda a 5-a este $L = E_{c5} - E_{c1} = m(v_5^2 - v_1^2)/2$, unde v_n este viteza camionului la timpul $t = n$ secunde de la plecare. Înlocuind $v_n = an$ se obține $L = ma^2(5^2 - 4^2)/2 = 8372,25$ J.

Observații. 1. Lucrul mecanic al forțelor de frecare în secunda a 5-a este $L_r = -fmg(x_5 - x_4) = -fmg a(5^2 - 4^2)/2 = -5380,2$ J, cu x_n distanța parcursă de camion în timpul $t = n$ secunde de la plecare.

2. Lucrul mecanic efectuat de motor în secunda a 5-a este $L_m = L + |L_r| = 13752,45$ J.

B.1. Temperatura aerului din cele două baloane este aceeași și rămîne constantă la punerea în legătură a baloanelor.

Metoda 1. Starea inițială este descrisă de ecuațiile $p_1 V_1 = \nu_1 RT$, $p_2 V_2 = \nu_2 RT$, iar starea finală este descrisă de ecuația $p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT$. Din aceste ecuații se obține $p_1 V_1 + p_2 V_2 = p(V_1 + V_2)$ (1), de unde $p_1 = (p(V_1 + V_2) - p_2 V_2)/V_1$. Înlocuind datele din problemă se obține $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m.

Metoda 2. Folosim legea lui Dalton care arată că presiunea totală a unui amestec de gaze este egală cu suma presiunilor parțiale. (Presiunea parțială este presiunea pe care ar avea-o fiecare componentă din amestec dacă ar ocupa singură tot volumul în aceleași condiții de temperatură). După punerea în legătură a baloanelor, presiunea amestecului este $p = p'_1 + p'_2$ (2), unde p'_1 și p'_2 sînt presiunile parțiale. Pentru a calcula presiunea parțială p'_1 se presupune că gazul din primul balon efectuează o

transformare izotermă de la starea (V_1, p_1, T) la starea $(V_1 + V_2, p'_1, T)$, adică $p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2)$ (3).

Aplicăm același raționament și pentru gazul din balonul al doilea și obținem $p_2 V_2 = p'_2 (V_1 + V_2)$ (4). Înlocuind p'_1 și p'_2 din (3) și (4) în (2) se obține (1).

2. Variația energiei interne a gazului în urma transformării de la starea inițială (p_1, V_1, T_1) la starea finală (p_3, V_3, T_3) este $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, unde ΔU_1 este variația energiei interne a gazului în transformarea izobară $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_1, V_3, T_2)$, iar ΔU_2 este variația energiei interne a gazului în transformarea izocoră $(p_1, V_3, T_2) \rightarrow (p_3, V_3, T_3)$. Avem : $\Delta U_1 = m C_v (T_2 - T_1) / \mu$ și $\Delta U_2 = m C_v (T_3 - T_2) / \mu$, astfel că

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v (T_3 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R (T_3 - T_1). \quad (5)$$

Pe de altă parte, din ecuația Clapeyron-Mendeleev scrisă pentru stările inițială și finală $p_1 V_1 = m R T_1 / \mu$, $p_3 V_3 = m R T_3 / \mu$ se obține $m R (T_3 - T_1) / \mu = p_3 V_3 - p_1 V_1$ care înlocuit în (5) dă $\Delta U = 5(p_3 V_3 - p_1 V_1) / 2 = 32,5 \cdot 10^5 \text{ J}$.

3. Lucrul mecanic este efectuat de gaz numai în transformarea izobară $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_1, V_3, T_2)$: $L = p_1 (V_3 - V_1) = 4 \cdot 10^5 \text{ J}$.

4. Căldura absorbită de gaz în transformarea de la starea (p_1, V_1, T_1) la starea (p_3, V_3, T_3) se obține prin aplicarea principiului întâi al termodinamicii : $Q = \Delta U + L = 36,5 \cdot 10^5 \text{ J}$.

C. Intensitatea curentului prin circuit este dată de legea lui Ohm pentru întregul circuit : $I = E / (R + 2R_1 + r)$, unde $R = 2\Omega$ este rezistența de sarcină, $2R_1 = 2 \cdot 0,15 = 0,3 \Omega$ reprezintă rezistența conductoarelor de legătură, iar $r = 0,3 \Omega$ rezistența interioară a sursei. Se obține $I = 50 \text{ A}$.

1. Căderea de tensiune pe linia de alimentare este $U_1 = 2R_1 I = 15 \text{ V}$.

2. Tensiunea la bornele sursei este $U_b = E - rI = I(R + 2R_1) = 115 \text{ V}$.

3. Alegem un sistem de coordonate $Oxyz$ cu axa Oz de-a lungul curentului și axa Ox de-a lungul inducției magnetice B_1 (fig. I.14.C). Liniile cimpului magnetic creat de curentul liniar sînt cercuri concentrice cu axa

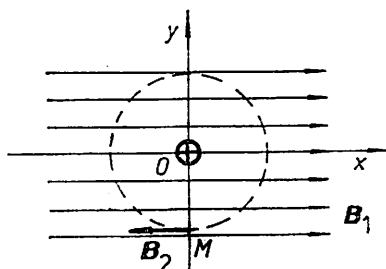


Fig. I.14.C

Oz (conductorul), sensul lor fiind dat de regula burghiului. Inducția magnetică într-un punct oarecare din planul xOy este suma vectorială $B = B_1 + B_2$, unde B_1 este inducția cimpului magnetic uniform, iar B_2 este inducția cimpului magnetic creat de curentul liniar. Din figura I.14.C se observă că $B = 0$ pentru punctele situate pe o dreaptă paralelă cu conductorul și care trece prin punctul M aflat pe Oy la distanța $d = OM$ determinată de egalitatea $B_2 = B_1$, adică $\mu_0 I / 2\pi d = B_1$, de unde $d = \mu_0 I / 2\pi B_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

I.15. A. Schema circuitului electric este reprezentată în figura I.15.A. Aplicăm legile lui Kirchhoff pentru :

- nodul B : $I_1 - I_2 - I_3 = 0$,
- ochiul $ABCD A$: $E = I_1 R_1 + I_2 R_2$,
- ochiul $BMNCB$: $0 = I_3 R_3 - I_2 R_2$.

Înlocuind datele din problemă se obține sistemul :

$$\begin{cases} I_2 + I_3 = 2 \\ 2R_1 + 2I_2 = 12 \Rightarrow R_1 = 4,5 \, \Omega, I_2 = 1,5 \, \text{A}, \\ 6I_3 - 2I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_3 = 0,5 \, \text{A}.$$

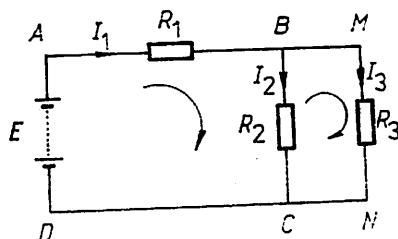


Fig. I.15.A

Energia dezvoltată într-un rezistor R în timpul t este $W = RI^2t$. Avem : $W_2 = R_2 I_2^2 t = 8100 \, \text{J}$, $W_3 = R_3 I_3^2 t = 2700 \, \text{J}$.

B. Alegem un sistem de coordonate xOy cu originea O în centrul de masă al corpului (fig. I.5.B). Potrivit principiului fundamental al dinamicii, rezultanta forțelor după Ox este egală cu ma , iar rezultanta forțelor după Oy este egală cu zero, adică :

$$\begin{cases} F_x - F_f = ma \\ F_y + N - G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cos \alpha - \mu N = ma \\ F \sin \alpha + N - mg = 0, \end{cases}$$

de unde $F = m(a + \mu g)/(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 39,8 \, \text{N}$.

Observații.

1. Lucrul mecanic total efectuat asupra corpului este egal cu produsul dintre forța rezultantă de-a lungul direcției de deplasare și deplasarea corpului, adică $L = R_x \cdot x = m \cdot a \cdot x$.

2. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L_0 = Fx \cos \alpha = (F_f + ma)x = |L_r| + L$, unde $L_r = -F_f \cdot x$ este lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de frecare.

C. Pentru ca la capetele unui conductor să nu apară tensiune, atunci cînd este deplasat într-un câmp magnetic uniform, trebuie ca în mișcarea sa conductorul să nu întretaie liniile de câmp magnetic. Prin urmare, mișcarea conductorului se face paralel cu $\mathbf{B}$. Vom demonstra aceasta.

Considerăm un sistem de coordonate $Oxyz$ cu $Oy \parallel \mathbf{B}$ și presupunem conductorul MN orientat perpendicular pe $\mathbf{B}$ (adică paralel cu Oz). Viteza de deplasare a conductorului face unghiul α cu $\mathbf{B}$, iar versorul normalei

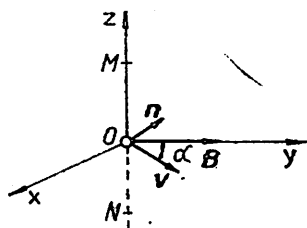


Fig. I.15.C

la planul descris de conductor, în mișcarea de translație cu viteza v , face unghiul $90 - \alpha$ cu $\mathbf{B}$ (fig. I.15.C). Fluxul inducției magnetice $\mathbf{B}$ prin suprafața „măturată” de conductor în deplasarea sa este : $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = Blvt \cos(90 - \alpha)$. Tensiunea electromotoare indusă în conductor este $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -Blv\Delta t \sin \alpha / \Delta t = -Blv \sin \alpha$. Din $e = 0$ rezultă $\sin \alpha = 0$, $\alpha = 0$, sau $\alpha = \pi$, adică viteza de deplasare a conductorului este paralelă cu $\mathbf{B}$.

I.16. A. Viteza medie a corpului în intervalul de timp Δt este $v_m = \Delta x / \Delta t = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$, unde $x_i = 5 + 3t_i + 2t_i^2$, $i = 1, 2$. Avem :

$$v_m = \frac{3(t_2 - t_1) + 2(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = 3 + 2(t_2 + t_1).$$

Viteza momentană a corpului se obține pentru $\Delta t \rightarrow 0$. În acest caz, notînd $t_1 = t$, avem $t_2 = t + \Delta t \rightarrow t$ și $t_2 + t_1 \rightarrow 2t$, astfel că $v = 3 + 4t$.

Graficul legilor mișcării și vitezei corpului este reprezentat în figura I.16.A.

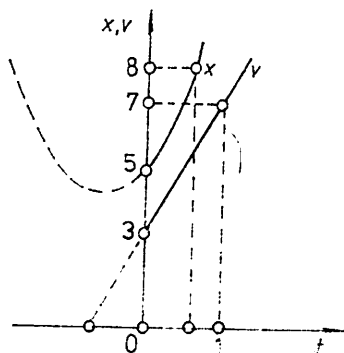


Fig. I.16.A

B.1. Mișcarea trenului fiind rectilinie uniform accelerată, potrivit principiului fundamental al dinamicii, avem: $ma = F_t - F_r$, (1). Accelerația se determină din legea vitezei: $v_2 = v_1 + a\Delta t$, de unde $a = (v_2 - v_1)/\Delta t = 0,05 \text{ m/s}^2$. Din (1) obținem: $F_r = F_t - ma = 30 \text{ kN}$. Coeficientul de frecare este $\mu = F_r/G = 0,003$.

2. Lucrul mecanic al forței de tracțiune în intervalul de timp Δt este: $L_0 = F_t \cdot d = F_t \cdot v_m \cdot \Delta t = 140 \cdot 10^6 \text{ J}$.

Puterea medie dezvoltată în intervalul de timp Δt este: $P = L_0/\Delta t = 14 \cdot 10^5 \text{ W}$.

Observații.

1. Lucrul mecanic al forței de frecare în timpul Δt este: $L_r = -F_r \cdot d = -F_r \cdot v_m \cdot \Delta t = -52,5 \cdot 10^6 \text{ J}$.

2. Lucrul mecanic total efectuat asupra trenului este: $L = L_0 + L_r = mav_m \Delta t = 87,5 \cdot 10^6 \text{ J}$.

C.1. Aplicăm legile lui Kirchhoff pentru:

— nodul B: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$,

— ochiul ABEFA: $E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3$,

— ochiul BCDEB: $E_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3$.

Înlocuind datele din problemă și rezolvînd sistemul se obține $I_1 = 14 \text{ A}$, $I_2 = -4 \text{ A}$, $I_3 = 10 \text{ A}$.

2. Valoarea negativă a curentului I_2 ne arată că acest curent are sens contrar sensului indicat.

3. Prin R_3 nu circulă curent dacă diferența de potențial între punctele B și E este egală cu zero, adică $U_{BE} = V_B - V_E = 0$. Dar $U_{BE} = E_1 - I_1 R_1$ și $U_{BE} = E_2 - I_2 R_2$. În cazul $I_3 = 0$ avem $U_{BE} = 0$, adică $E_1 - I_1 R_1 = 0$, $E_2 - I_2 R_2 = 0$ (1) și curentul rezultat prin circuit este egal cu zero: $I_1 + (-I_2) = 0$ (2). Din relațiile (1) și (2) se obține $E_1/R_1 = E_2/R_2$ (condiția ca prin R_3 să nu circule curent).

I.17. A. Metoda 1. Potrivit figurii I.17.A.1 se poate considera că greutatea G_C a porțiunii rămase, aplicată în centrul de greutate C, este rezultatul compunerii forțelor paralele și de sens opus G_A (greutatea plăcii inițiale, aplicată în A) și G_B (greutatea pătratului înlăturat, aplicată în B). Avem: $G_A/G_B = BC/AC = (x_B - x_C)/(x_A - x_C) = (y_B - y_C)/(y_A - y_C)$ și $G_B = G_A/4$. Dar $x_A = y_A = l/2$, $x_B = y_B = 3l/4$, astfel că $x_C = y_C = 5l/12$. Distanța noului centru de greutate C față de vechiul centru de greutate A este: $CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = l\sqrt{2}/12 = 0,12 \text{ m}$.

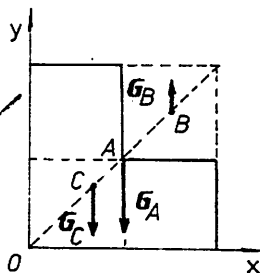


Fig. I.17.A.1

Metoda 2. Potrivit figurii I.17.A.2, porțiunea rămasă din placă se descompune în pătratul $AMNP$ de latură $l/2$ și dreptunghiul $OMQR$ cu lungimea l și lățimea $l/2$. Fie C_1 centrul de greutate al pătratului $AMNP$ și C_2 centrul de greutate al dreptunghiului $OMQR$. Coordonatele centrului de greutate C a porțiunii rămase sînt date de :

$$x_C = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2},$$

$$y_C = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2}{G_1 + G_2},$$

unde $G_1 = G/4$, $G_2 = G/2$, $x_1 = l/4$, $y_1 = 3l/4$, $x_2 = l/2$, $y_2 = l/4$. Făcînd înlocuirile se obține $x_C = 5l/12$, $y_C = 5l/12$. Se observă că $C \in OA$ și C se află la distanța $OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 5l\sqrt{2}/12 = 0,59 \text{ m}$ de virful O și la distanța $CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = l\sqrt{2}/12 = 0,12 \text{ m}$ de vechiul centru de greutate.

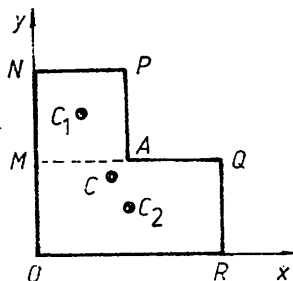


Fig. I.17.A.2

B. T.e.m. indusă este $e = Blv$, de unde $B = e/lv = 5 \text{ T}$. Curentul prin conductor va fi $I = e/(R + r) = 0,31 \text{ A}$.

I.18. A. Metoda 1. Descompunem greutatea G a șinei în două forțe paralele și de același sens : F_1 aplicată în A , la capătul șinei, și F_2 aplicată în B , la $d = 1 \text{ m}$ de celălalt capăt (fig. I.18.A.1). Avem : $F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB$ și $F_1 + F_2 = G$, de unde $F_1 = G(l - d)/2 = 3920 \text{ N}$, $F_2 = Gd/2 = 4900 \text{ N}$. Tensiunile în cele două frînghii sînt egale și de sens contrar cu forțele F_1 și respectiv F_2 , adică $T_1 = 3920 \text{ N}$, $T_2 = 4900 \text{ N}$.

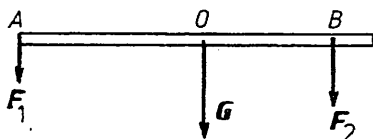


Fig. I.18.A.1

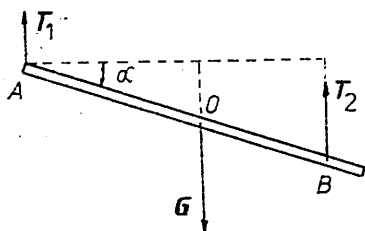


Fig. I.18.A.2

Metoda 2. Deoarece șina nu se rotește în timpul ridicării, momentul total trebuie să fie zero față de orice punct al șinei. Alegem ca pol punctul A de aplicație a tensiunii T_1 (fig. I.18.A.2) și condițiile de echilibru se scriu :

$$\begin{cases} R = 0 \\ M(A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 - G = 0 \\ T_1 \cdot 0 + T_2(l - d)\cos \alpha - G(l/2)\cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 = G \\ T_2(l - d) = G(l/2), \end{cases}$$

deoarece $\cos \alpha \neq 0$. Din sistem se obține $T_2 = Gl/2(l - d) = 4900 \text{ N}$ și $T_1 = 3290 \text{ N}$.

B. Scriem egalitatea cantităților de căldură absorbită și cedată :

$$m_a c_a (t_1 - 0) + m_a \lambda_g = m_c \lambda_c \Rightarrow m_c = m_a (c_a t_1 + \lambda_g) / \lambda_c = 10,7 \text{ kg}.$$

C. Pentru un solenoid lung, $B = \mu_0 \mu_r N I / l$. Dar $\Phi = BS$, astfel că $S = \Phi / B = \Phi l / \mu_0 \mu_r N I = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

I.19. A. Urcarea săniuței pe planul înclinat este o mișcare uniform încetinită cu accelerația $a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Dacă $s_{\max}$ este distanța parcursă pe plan pînă la oprire, atunci timpul de urcare este $t_u = \sqrt{-2s_{\max}/a_u}$. La coborîre mișcarea este uniform accelerată cu accelerația $a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, iar timpul de coborîre este $t_c = \sqrt{2s_{\max}/a_c}$. Din $t_c/t_u = n$ și $t_c/t_u = \sqrt{-a_u/a_c}$ se obține $\mu = [(n^2 - 1)/(n^2 + 1)] \cdot \tan \alpha$, adică $\mu = 0,095$.

B. Alegem un sistem de coordonate xOy cu axa Ox de-a lungul direcției inițiale de mișcare a electronului (fig. I.19.B). Între plăcile condensatorului, asupra electronului acționează forța $F_y = eE = eU/d$ astfel

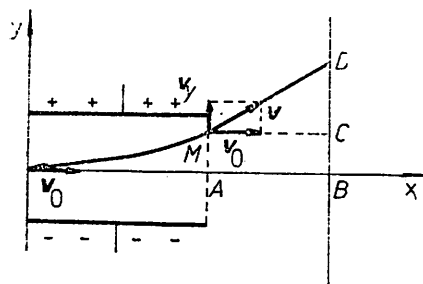


Fig. I.19.B

că mișcarea electronului este rezultatul compunerii mișcărilor pe direcțiile Ox și Oy . De-a lungul direcției Ox mișcarea este uniformă, cu viteza v_0 și $x = v_0 t$; de-a lungul direcției Oy mișcarea electronului este uniform variată, fără viteză inițială, cu accelerația $a_y = F_y/m = eU/md$ și $y = a_y t^2/2 = eU t^2/2md$. Înlocuind $t = x/v_0$ se obține ecuația traiectoriei între plăcile condensatorului: $y = eU x^2/2mdv_0^2$ (arc de parabolă). Deviația electronului la ieșirea dintre plăci este $AM = y_1 = eU x_1^2/2mdv_0^2$. După ieșirea dintre plăcile condensatorului, mișcarea electronului este rectilinie uniformă cu viteza $v = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{v_0^2 + (a_y t_1)^2} = \sqrt{v_0^2 + (eU x_1/mdv_0)^2}$ care face unghiul α cu axa Ox astfel încît $\tan \alpha = v_{y1}/v_{x1} = eU x_1/mdv_0^2$. Potrivit figurii I.19.B avem $CD = AB \cdot \tan \alpha = eU x_1 x_2/mdv_0^2$ și deviația totală a electronului este

$$BD = \frac{eU x_1}{mdv_0^2} \left(\frac{x_1}{2} + x_2 \right) = 0,03 \text{ m.}$$

I.20. A. Fie sistemul de coordonate xOy cu axa Oy verticală în sus și originea în punctul de unde este aruncat al doilea corp. Ecuațiile mișcării se scriu: $y_1 = h - gt^2/2$, $y_2 = v_0 t - gt^2/2$. Condiția de întâlnire este $y_1 = y_2$, care ne dă $t_i = h/v_0 = 1,5 \text{ s}$, $y_i = h - gt_i^2/2 = 3,975 \text{ m}$. Întîlnirea are loc la coborîrea corpului al doilea, deoarece $t_u = v_0/g = 1,02 \text{ s}$.

B.1. Scriem ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru stările inițială și finală: $p_1 V = \nu_1 R T_1 = m_1 R \bar{T}_1/\mu$ (1), $p_2 V = m_2 R T_2/\mu$ (2), de unde:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) \text{ sau } \frac{V}{R} = \frac{\Delta m T_1 T_2}{\mu(p_1 T_2 - p_2 T_1)}. \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) se obține:

$$\nu_1 = \frac{V}{R} \cdot \frac{p_1}{T_1} = \frac{\Delta m}{\mu(1 - p_2 T_1/p_1 T_2)} = 0,2 \text{ k mol.}$$

$$2. m_2 = m_1 - \Delta m = \nu_1 \mu - \Delta m = 2,4 \text{ kg.}$$

I.21. A.1. La urcarea pe planul înclinat, principiul fundamental al dinamicii conduce la ecuația $F_t - F_f - G_t = ma$, unde F_t este forța de tracțiune, F_f este forța de frecare, iar G_t este componenta tangențială a greutății. Mișcarea corpului fiind uniformă ($a = 0$, $v = \text{const.}$), avem: $F_t = G_t + F_f = mg(\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) = 336,5 \text{ N}$.

2. $E_p = mgh = mgl \sin \alpha = 2500 \text{ J}$.

3. Aplicăm legea conservării energiei (în sisteme disipative de energie): $E_p = E_c + L_f \Rightarrow E_c = E_p - L_f = mgl \cdot \sin \alpha - \mu_1 mgl \cdot \cos \alpha = 1635 \text{ J}$.

4. Aplicăm aceeași lege pe porțiunea orizontală: $E_c = L_f = 1635 \text{ J}$.

Observație. Din $E_c = mv^2/2$ se obține viteza mobilului la baza planului, după coborîre: $v = \sqrt{2E_c/m}$. Mișcarea pe planul orizontal este uniform variată cu accelerația $a = -\mu_2 g$. Distanța parcursă de corp pînă la oprire este $d = -at^2/2 = -v^2/2a = E_c/(\mu_2 mg)$ și $L_f = F_f \cdot d = \mu_2 mg E_c / \mu_2 mg = E_c$.

B.1. Din $P = UI = RI^2$ se obține $R = P/I^2 = 100 \Omega$.

2. Avem $Q_{\text{ced}} = Q_{\text{primit}}$ unde $Q_{\text{ced}} = Pt$ este căldura dezvoltată de încălzitorul electric, iar $Q_{\text{primit}} = m\lambda_g + mc_a(t - t_0) + m\lambda_v$ este căldura primită de gheața care se transformă în vapori. Rezultă:

$$m = \frac{Pt}{\lambda_g + c_a(t - t_0) + \lambda_v} = 0,48 \text{ kg}.$$

C.1. (a) $E = mv^2/2$, E reprezintă energia cinetică a unui corp de masă m care se deplasează cu viteza v .

(b) $Q = mc\Delta t$, Q reprezintă cantitatea de căldură necesară unui corp de masă m și căldură specifică c pentru a se încălzi cu Δt grade.

(c) $e = -\Delta\Phi/\Delta t$, e reprezintă t.e.m. indusă într-un circuit străbătut de un flux magnetic a cărui viteză de variație este $\Delta\Phi/\Delta t$.

2. Mărimea v reprezintă viteza mobilului. Dacă în timpul Δt mobilul parcurge Δx , atunci viteza medie a mobilului este $v_m = \Delta x/\Delta t = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Pentru Δt foarte mic ($\Delta t \rightarrow 0$), viteza mobilului la un moment dat este $v = dx/dt$.

3. Relația (c) exprimă legea inducției electromagnetice (legea Faraday): tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața aceluia circuit, luată cu semn schimbat.

I.22. A.1. Deplasarea corpului pe planul înclinat fiind fără frecare în câmpul gravitațional, se poate aplica legea conservării energiei mecanice: energia mecanică în punctul A este egală cu energia mecanică în punctul B : $mv_A^2/2 + E_{pA} = mv_B^2/2 + E_{pB}$. Luînd suprafața orizontală, care trece prin B , ca nivel zero pentru energia potențială și ținînd seama că $v_A = 0$, avem: $mv_B^2/2 = mgh$, de unde $v_B = \sqrt{2gh} = 4,4 \text{ m/s}$.

Observație. Viteza corpului la baza planului înclinat poate fi obținută și din ecuațiile mișcării pe planul înclinat.

2. Pe suprafața orizontală de la B la C mișcarea corpului este cu frecare, adică o mișcare uniformă încetinită. Din principiul fundamental al dinamicii, $ma = -F_f$ sau $ma = -\mu mg$ se obține $a = -\mu g$ (2).

Legile mișcării pe porțiunea $BC = d$ sînt: $d = v_B t + at^2/2$, $v_C = v_B + at$, de unde $v_C = \sqrt{v_B^2 + 2ad} = \sqrt{2gh - 2\mu gd} = 4,08 \text{ m/s}$. (3).

Observație. Viteza în punctul C poate fi obținută și din teorema variației energiei cinetice: $L_r = \Delta E_c$ sau $-\mu mgd = m(v_C^2 - v_B^2)/2$, de unde se obține (3).

3. Pe CD mișcarea este fără frecare în câmp gravitațional și se aplică legea de conservare a energiei mecanice: $mv_c^2/2 = mgh_D$, de unde $h_D = v_c^2/2g = h - \mu d = 0,85$ m (4). Câmpul gravitațional fiind un câmp de forțe conservativ, corpul urcă pînă la înălțimea h_D indiferent de forma traiectoriei.

Comentariu. Dacă raza arcului CD este suficient de mică, corpul poate executa o mișcare pe o buclă închisă (looping). Raza acestei bucle se obține din condiția ca, în punctul cel mai înalt al traiectoriei, forța centrifugă să fie mai mare sau cel mult egală cu greutatea corpului. Notînd cu M punctul cel mai înalt al buclei închise, avem: $mv_M^2/R \geq mg$, de unde $v_M \geq \sqrt{Rg}$ (5). Legea conservării energiei mecanice conduce la: $mv_M^2/2 + mg \cdot 2R = mv_c^2/2$ (6). Din relațiile (5) și (6) se obține $R \leq v_c^2/5g$ (7).

Dacă raza arcului CD este mai mare decît $v_c^2/5g$ însă mai mică decît $v_c^2/2g$, corpul părăsește curba circulară. Pentru $R = v_c^2/2g$ corpul parcurge un sfert de cerc, iar pentru $R > v_c^2/2g$ corpul se oprește la mai puțin de un sfert din cerc.

4. În cazul cînd raza suprafeței curbe CD îndeplinește condiția $R \geq v_c^2/2g = h_D$, corpul se întoarce pe traiectoria DC și apoi își continuă mișcarea pe suprafața orizontală cu frecare pînă într-un punct E unde se oprește. La coborîrea pe DC , mișcarea fiind fără frecare, viteza în punctul C este aceeași cu viteza în C la urcare, dată de (3). Din teorema de variație a energiei cinetice pe CE , cu condiția de oprire în E , se obține $-\mu mgx = -mv_c^2/2$, de unde $x = CE = v_c^2/2\mu g = h/\mu - d = 2,8$ m. Deoarece valoarea obținută pentru x este mai mare decît distanța CB , rezultă că oprirea corpului are loc pe planul înclinat. Viteza corpului în punctul B , la întoarcerea corpului, se obține din teorema de variație a energiei cinetice pe CB : $-\mu mgd = mv_B^2/2 - mv_c^2/2$, de unde $v_B^2 = \sqrt{v_c^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2gh - 4\mu gd}$ (8).

Corpul urcă fără frecare pe planul înclinat, cu viteza v_B pînă la o înălțime h_1 dată de legea conservării energiei mecanice: $mv_B^2/2 = mgh_1$. Se obține $h_1 = h - 2\mu d = 0,7$ m (9).

De la înălțimea h_1 corpul coboară fără frecare pe planul înclinat, se deplasează cu frecare pe suprafața orizontală BC , urcă fără frecare pe suprafața curbă pînă într-un punct D_1 ș.a.m.d. Energia cinetică a corpului se micșorează de fiecare dată numai cu lucrul mecanic al forțelor de frecare pe distanța de la B la C și înapoi. Numărul de curse făcute de corp

între punctele B , C și înapoi este: $n = \left[\frac{mgh}{\mu mgd} \right] = \left[\frac{h}{\mu d} \right] = 6$, cu $[]$ s-a

notat partea întreagă. După aceste curse între B , C și înapoi, corpul se află în B și are energia cinetică $E = mgh - 6\mu mgd = 0,1 \cdot mg$. Această energie cinetică este egală cu lucrul mecanic al forțelor de frecare pe distanța x , plecînd din punctul B : $0,1 \cdot mg = \mu mgx \Rightarrow x = 1/3$ m. Corpul se oprește deci la distanța $d - x$ de punctul C egală cu: $d - x = 1/6$ m.

Observații.

1. Corpul execută o mișcare oscilatorie amortizată între $ABCD$, amortizarea avînd loc numai pe porțiunea orizontală BC .

2. Înălțimile succesive la care urcă corpul pe planul înclinat AB sînt: h , $h - 2\mu d$, $h - 4\mu d$, $h - 6\mu d$, iar cele corespunzătoare pe suprafața curbă CD sînt: $h - \mu d$, $h - 3\mu d$, $h - 5\mu d$.

B. În toate cele patru cazuri (rezistoarele cuplate independent sau conectate între ele), cantitatea de căldură necesară aducerii apei la fierbere, neglijînd pierderile, este aceeași. Potrivit legii Joule $Q = U^2 t_1 / R_1 =$

$= U^2 t_2 / R_2 (1)$, unde U este tensiunea de la rețeaua electrică. La legarea în serie, $R_s = R_1 + R_2$ și $Q = U^2 t_s / R_s = U^2 t_s / (R_1 + R_2) (2)$. Din (1) și (2) se obține $t_s = t_1 + t_2 (3)$. La legarea în paralel $1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2$ și $Q = U^2 t_p (1/R_1 + 1/R_2) (4)$. Din (1) și (4) rezultă $1/t_p = 1/t_1 + 1/t_2$, sau $t_p = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) (5)$.

La legarea în serie a rezistoarelor se absoarbe de la rețea un curent mai mic ($I_s = U / (R_1 + R_2)$), iar timpul de fierbere a apei este mai mare ($t_s = t_1 + t_2$); la legarea în paralel a rezistoarelor se absoarbe de la rețea un curent de intensitate mai mare ($I_p = U(R_1 + R_2) / R_1 R_2$) și timpul de fierbere este mai mic ($t_p < t_1, t_p < t_2$).

C.1. Deoarece $l_1 \ll l_2$ se poate asimila bobina a doua cu un solenoid lung. Inducția magnetică în mijlocul acestui solenoid este ($\mu_r = 1$): $B_2 = \mu_0 N_2 I_2 / l_2 (1)$. Fluxul acestei inducții magnetice prin bobina 1 este: $\Phi = N_1 B_2 S_1 = \mu_0 N_1 N_2 I_2 S_1 / l_2 (2)$. Conform legii inducției electromagnetice, t.e.m. indusă în bobina 1 este: $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -(\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t (3)$. În condițiile problemei, Φ_1 este dat de (2), iar $\Phi_2 = 0$ (deoarece I_2 scade la zero). Avem: $\Delta t = \mu_0 N_1 N_2 I_2 S_1 / e_1 l_2 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

2. Din legea lui Ohm se obține: $I_1 = e_1 / R$, de unde $R = e_1 / I_1 = 100 \Omega$.

I.23. A. Potrivit principiului fundamental al dinamicii $F_t - F_f = ma$, unde F_t este forța de tracțiune, $F_f = \mu mg$ este forța de frecare, iar a accelerația imprimată corpului.

1. Lucrul mecanic efectuat de om asupra lăzii este $L = F_t \cdot d = (ma + F_f) \cdot d = m(a + \mu g) d = 4500 \text{ J}$.

2. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_f = -F_f \cdot d = -\mu mgd = -4000 \text{ J}$.

3. Lucrul mecanic total efectuat asupra lăzii este $L_0 = (F_t - F_f) \cdot d = mad = 500 \text{ J}$.

B.1. Variația energiei interne a gazului la încălzirea izobară este $\Delta U = \nu C_p \Delta T$. Folosind relația lui R. Mayer: $C_p - C_v = R$ și înlocuind datele din problemă se obține $\Delta U = 2493 \text{ kJ}$.

2. Lucrul mecanic efectuat de gaz în timpul încălzirii izobare este $L = p\Delta V = \nu R\Delta T = 831 \text{ kJ}$.

3. Căldura Q_p absorbită se obține folosind primul principiu al termodinamicii: $Q_p = \Delta U + p\Delta V = \nu C_p \Delta T = 3324 \text{ kJ}$.

I.24. A. Lucrul mecanic efectuat de macara este egal cu produsul dintre forța de tracțiune (tensiunea în cablu) și deplasare.

1. La ridicarea cu viteză constantă, $T_1 = mg$ și $L_1 = mgh = 15 \text{ kJ}$.

2. La ridicarea cu accelerația a , $T_2 = m(g + a)$ și $L_2 = m(g + a)h = 18 \text{ kJ}$.

B. Inductanța bobinei este $L = \mu_0 \mu_r N^2 S / l$, unde N este numărul de spire, S secțiunea unei spire și l lungimea bobinei. Tensiunea electromotoare autoindusă este dată de legea inducției electromagnetice $e = -L\Delta I/\Delta t$, de unde $\Delta I/\Delta t = e/L = el/\mu_0 \mu_r N^2 S (1)$.

1. Pentru bobina fără miez ($\mu_r = 1$), înlocuind datele problemei în (1) obținem $\Delta I/\Delta t = 3,2 \cdot 10^4 \text{ A/s}$.

2. Pentru bobina cu miez ($\mu_r = 100$) avem $\Delta I/\Delta t = 3,2 \cdot 10^2 \text{ A/s}$.

I.25. A. Corpul efectuează o mișcare uniform accelerată fără viteză inițială, astfel că $a = v/t = 0,2 \text{ m/s}^2$.

B.1. Diferența de potențial dintre punctele A și B este $V_A - V_B = L/q$, și

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{Lr_A r_B}{q(r_B - r_A)} = 2 \cdot 10^{-3} \text{C}.$$

2. $V_A - V_B = L/q = 3 \cdot 10^6 \text{ V}.$

I.26. A.1. Principiul fundamental al dinamicii conduce la $-F_f = ma$, de unde $a = -\mu g = -1,96 \text{ m/s}^2$ (mișcare uniform încetinită cu viteză inițială).

2. Din legea vitezei $v = v_0 + at$ se obține timpul pînă la oprire: $t_0 = -v_0/a = 2,5 \text{ s}.$

3. Distanța parcursă de corp pînă la oprire este $s = v_0^2/2a = 6,125 \text{ m}.$

B.1. Al treilea corp va fi în echilibru dacă rezultanta forțelor care acționează asupra lui este egală cu zero, adică $F_{13} + F_{23} = 0$. Deoarece Q_1, Q_3 și Q_2, Q_3 au semne contrare, forțele F_{13} și F_{23} sînt forțe de atracție, adică au sensuri contrare și $F_{13} = Q_1 Q_3 / 4\pi\epsilon_0 x^2$, $F_{23} = Q_2 Q_3 / 4\pi\epsilon_0 (r - x)^2$. Impunînd condiția $F_{13} = F_{23}$ obținem $Q_1/x^2 = Q_2/(r - x)^2$, de unde $x = r\sqrt{Q_1}/(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}) = r(\sqrt{2} - 1) = 0,41r$.

2. Cele două sarcini fiind de același semn, cîmpul electric resultant $E = E_1 + E_2$ va avea intensitatea egală cu zero într-un punct situat între cele două sarcini, adică $Q_1/4\pi\epsilon_0 x^2 = Q_2/4\pi\epsilon_0 (r - x)^2$, de unde $x = r\sqrt{Q_1}/(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}) = 0,41 r$.

Observație. Din $F = qE$ rezultă că forța care acționează asupra sarcinii Q_3 este egală cu zero atunci cînd ea se află în punctul în care cîmpul electric produs de sarcinile Q_1 și Q_2 este egal cu zero.

3. Dacă cele două corpuri au sarcini de semne contrare, potențialul într-un punct oarecare M este: $V_M = V_{1M} + V_{2M} = Q/4\pi\epsilon_0 x - nQ/4\pi\epsilon_0 (r - x)$. Vom avea $V_M = 0$ pentru punctul M situat între cele două corpuri, la distanța $x = r/(n + 1)$ de primul corp.

I.27. A. Viteza fiind constantă, lucrul mecanic efectuat de către forța de tracțiune este $L = F_t \cdot h = mgh = 20 \text{ kJ}.$

2. Potrivit principiului fundamental al dinamicii, $F_t - G = ma$ sau $F_t = m(g + a)$, de unde $L = F_t \cdot h = m(g + a)h = 24 \text{ kJ}.$

B.1. $R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 6 \Omega.$

2. Tensiunea la borne: $U = R_p I = 60 \text{ V}.$

3. $W = UI t = 180\,000 \text{ J}.$

I.28. A.1. Ciocnirea vagoanelor se consideră plastică și are loc conservarea impulsului: $m_1 v + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) v'$, de unde $v' = m_1 v / (m_1 + m_2) = 3 \text{ m/s}$ (viteza vagoanelor cuplate, după ciocnire).

2. Căldura dezvoltată în procesul ciocnirii plastice este egală cu variația energiei cinetice a sistemului format din cele două vagoane: $Q = -\Delta E_c = m_1 v^2 / 2 - (m_1 + m_2) v'^2 / 2 = 270 \cdot 10^3 \text{ J}.$

3. Vagonul își micșorează viteza de la $v_0 = 10 \text{ m/s}$ la $v = 9 \text{ m/s}$ în $t = 10 \text{ s}$ și din $v = v_0 + at$ se obține $a = -0,1 \text{ m/s}^2$. Distanța parcursă de vagoane din momentul cuplării pînă la oprire este $d = -v^2 / 2a = 45 \text{ m}.$

Observație. Mișcarea fiind cu frecare, din $a = -\mu g$ se obține $\mu = 0,01$.

B.1. La gruparea în serie $R_s = R_1 + R_2 = 4 \Omega$, iar la gruparea în paralel $R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 1 \Omega$.

2. Folosind expresiile $P = RI^2$, $I = E/(R + r)$, avem $R_s E^2 / (R_s + r)^2 = R_p E^2 / (R_p + r)^2$, de unde $r = \sqrt{R_s R_p} = 2 \Omega$.

3. Masa de substanță depusă la unul din electrozi este $m = KIt$ (prima lege a electrolizei):

— în cazul grupării serie: $m_s = KI_s t = KEt / (R_s + r)$,

— în cazul grupării paralel: $m_p = KI_p t = KEt / (R_p + r)$.

Deoarece $R_p < R_s$, rezultă $m_p > m_s$, adică la legarea băilor în paralel se depune într-un timp t o masă mai mare de substanță decît în cazul legării în serie.

I.29. A.1. Sub acțiunea componentei tangențiale $G_t = G \cdot \sin \theta$ corpul se deplasează cu frecare pe plan în jos, forța de frecare F_f fiind orientată de-a lungul planului în sus. În prezența forței F_1 , aplicată de-a lungul planului în sus, corpul se află în repaus, adică $G_t = F_f + F_1$ (1). În cazul cînd corpul este tras uniform în sus de-a lungul planului, forța de frecare F_f este orientată de-a lungul planului în jos, astfel că $G_t + F_f = F_2$ (2). Eliminînd G_t din relațiile (1) și (2) se obține $F_f = (F_2 - F_1)/2 = 2 \text{ N}$ (3).

2. Din (1) și (2) se obține $G_t = (F_1 + F_2)/2 = 5 \text{ N}$. Folosind $G_t = mg \cdot \sin \theta$, rezultă $m = 1 \text{ kg}$. Coeficientul de frecare se obține din $F_f = \mu N = \mu G_n = \mu mg \cdot \cos \theta$; avem $\mu = 0,4/\sqrt{3} = 0,23$.

3. În cazul cînd planul înclinat se deplasează cu accelerația a pe o suprafață orizontală, de la dreapta spre stînga (fig. I.29.A), asupra corpului acționează forța orizontală de inerție $F_i = ma$ îndreptată în sens opus mișcării planului. Forța F_i se descompune în două componente: o componentă $F_{it} = F_i \cdot \cos \theta$ de-a lungul planului înclinat, orientată în sus, și o componentă $F_{in} = F_i \cdot \sin \theta$ perpendiculară pe planul înclinat și paralelă cu G_n . În acest caz forța de frecare dintre corp și plan este:

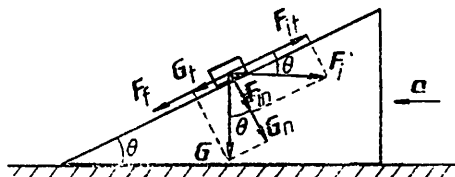


Fig. I.29.A

$F'_f = \mu N' = \mu (G_n + F_{in}) = \mu m(g \cdot \cos \theta + a \cdot \sin \theta)$, fiind orientată în jos, de-a lungul planului înclinat. Corpul se deplasează uniform în sus pe planul înclinat dacă $G_t + F'_f = F_{it}$, de unde se obține

$$a_{\min} = \frac{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \cdot \sin \theta} = \frac{70\sqrt{3}}{13} = 9,3 \text{ m/s}^2.$$

Observație. Pentru a menține corpul în repaus pe planul înclinat trebuie ca $G_t = F_{it} + F'_f$, de unde $a = g(\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) / (\cos \theta + \mu \cdot \sin \theta) = 30\sqrt{3}/17 = 3,05 \text{ m/s}^2$.

B.1. Din $W_s = I_s^2 R_s t$ se obține intensitatea curentului la legarea

în serie: $I_s = 5 \text{ A}$.

2. Din prima lege a electrolizei se obține $K = m/I_s t = 1,118 \text{ mg/C}$, iar din legea a doua a electrolizei: $K = (1/F) \cdot (A/n)$ se obține $A = KF n = 107,77$.

3. La legarea în serie, legea a doua a lui Kirchhoff se scrie: $E = I_s(r + R_f + R_e)$ (1), iar la legarea în paralel (fig. I.29.B), legile lui Kirchhoff se scriu: $I = I_1 + I_2$, $0 = I_1 R_f - I_2 R_e$, $E = I_2 R_e + Ir$ (2). Din sistemul format de ecuațiile (1), (2) și condiția $I_2 = I_s$ se obține:

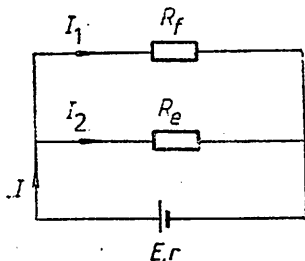


Fig. I.29.B

$$E = I_s(R_e^2 + R_f^2 + R_e R_f) / R_e = 131,25 \text{ V}, \quad r = R_f^2 / R_e = 1,25 \Omega.$$

II. SUBIECTE de examen propuse 152-183

Indicații și răspunsuri 184-205

II.1. A. Un corp se deplasează în lungul unei drepte, distanța lui față de origine fiind dată în fiecare moment de relația $x = 8t - 3t^2$, unde x este în metri, iar t în secunde. Să se afle :

1. Viteza medie a corpului în intervalul de la $t = 0$ la $t = 1$ s și în intervalul de la $t = 0$ la $t = 4$ s.

2. Viteza instantanee a corpului la momentul $t = 3$ s, punind Δt mai întâi egal cu 0,1 s, apoi cu 0,01 s și în cele din urmă cu 0,001 s. Spre ce limită tind valorile obținute?

3. Viteza instantanee a corpului la un moment oarecare t .

4. Accelerația corpului.

B. Un cilindru orizontal închis la ambele capete, de lungime $2l = 2$ m și secțiune $S = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, este împărțit în două compartimente egale cu ajutorul unui piston mobil. În ambele compartimente ale cilindrului se află azot la presiunea $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ și temperatura $T = 290$ K. Se deplasează pistonul spre dreapta pe distanța $\Delta l = 0,4$ m, temperatura rămânând constantă. Să se afle :

1. Presiunea gazului în fiecare compartiment.

2. Forța ce trebuie să acționeze asupra pistonului pentru a-l menține în noua poziție.

3. Masa de gaz ce trebuie scoasă dintr-un compartiment pentru ca după ce lăsam pistonul liber acesta să nu se deplaseze.

Se dă $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, $\mu_N = 28 \text{ kg/kmol}$.

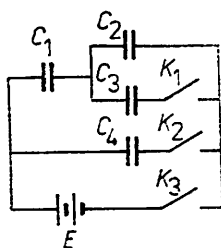


Fig. II.1.C

C. În montajul din figura II.1.C se cunosc următoarele elemente : $C_1 = 200 \mu\text{F}$, $C_2 = 600 \mu\text{F}$, $C_3 = 800 \mu\text{F}$, $C_4 = 400 \mu\text{F}$, $E = 1000$ V. Inițial comutatoarele K_1 , K_2 , K_3 sînt deschise și toate condensatoarele descărcate. Se efectuează următoarele manevre :

1. se închide K_3 ;

2. se deschide K_3 și se închide K_1 ;

3. se închide și K_2 . Să se determine sarcinile electrice și tensiunile la bornele fiecărui condensator, după efectuarea fiecăreia din cele trei manevre.

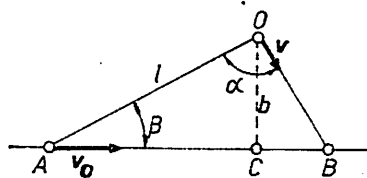


Fig. II.2.A

II.2. A. Un om aflat la distanța $b = 50$ m de o șosea observă la un moment dat un autobuz venind cu viteza $v_0 = 12$ m/s și aflat în acel moment la distanța $l = 400$ m de om (fig. II.2.A). Se cere :

1. Sub ce unghi (față de direcția inițială om-autobuz) trebuie să alerge rectiliniu omul, cu viteza $v = 3$ m/s, pentru a întâlni autobuzul.

2. Cu ce viteză minimă trebuie să alerge omul pentru a întâlni autobuzul.

3. Distanța parcursă de autobuz până la întâlnire, în cazul când omul fuge cu viteză minimă.

4. Timpul cât fuge omul cu viteza minimă, pentru a întâlni autobuzul.

B. O sferă de cupru de masă $m = 10 \text{ kg}$ are în interior o cavitate de volum $V = 1 \text{ m}^3$ în care se găsesc $\nu = 2 \text{ kmol}$ de dioxid de carbon la presiunea $p_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. Sfera este lăsată să cadă liber de la înălțimea h . După ciocnirea cu suprafața dură a pământului, sfera se ridică la înălțimea $h' = 10 \text{ m}$. Știind că $n = 0,8$ din căldura degajată este absorbită de cupru și de gazul din cavitate, sistemul atinge temperatura $T = 305 \text{ K}$, să se calculeze înălțimea de la care a căzut sfera. Se neglijează variația de volum în timpul ciocnirii. Se dă căldura specifică a cuprului $c_{cu} = 380 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, căldura specifică la presiune constantă pentru dioxid de carbon, $c_p = 830 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, masa molară pentru dioxid de carbon, $\mu = 44 \text{ kg/kmol}$, $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

C. Între plăcile unui condensator plan, dispuse orizontal, se aplică o tensiune $U = 51 \text{ V}$, distanța dintre plăci fiind $d = 2 \text{ cm}$. În spațiul dintre plăci se află în repaus o picătură sferică de ulei care poartă sarcina electrică q și care este observată lateral cu ajutorul unui microscop. Se schimbă tensiunea dintre plăci și se observă prin microscop cum picătura urcă uniform în câmpul vizual parcurgând o distanță de 1 mm în timpul $t_1 = 20 \text{ s}$. Inversînd sensul tensiunii aplicate, picătura coboară uniform, parcurgând aceeași distanță de 1 mm în timpul $t_2 = 10 \text{ s}$. Forța de frecare între picătura de ulei și aer este dată de relația lui Stokes $F = 6 \pi \eta r v$, unde η este coeficientul de viscozitate dinamică, care pentru aer are valoarea $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, r raza picăturii și v viteza ei. Să se determine:

1. Raza r a picăturii.

2. Sarcina electrică q purtată de picătura de ulei.

3. Numărul sarcinilor elementare care formează sarcina q .

Se dau: densitatea aerului $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, densitatea uleiului $\rho = 846,2 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

II.3. A. Pe un plan orizontal, cu coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,3$, sint așezate două corpuri de mase $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, legate între ele cu un fir inextensibil. De corpul m_1 este legat un alt corp de masă $M = 2 \text{ kg}$ printr-un fir trecut peste un scripete ideal ca în figura II.3.A. Să se afle accelerația sistemului și tensiunile din fire. Care va fi accelerația sistemului și tensiunile din fire în cazul în care corpul M se dezleagă și în locul lui se trage în jos cu o forță egală cu greutatea lui, Mg ?

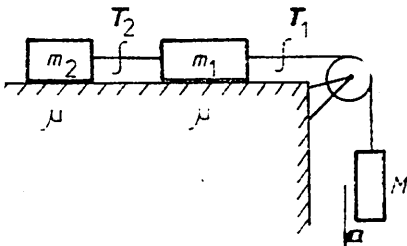


Fig. II.3.A

B. Un vas izolat adiabatic de mediul exterior este împărțit în două părți egale cu ajutorul unui perete subțire termoizolator. Într-un compartiment al vasului se află un gaz ideal la temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$, presiunea $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$, avînd căldura molară izocoră $C_{v1} = 3R/2$. În celălalt compartiment se află alt gaz ideal la temperatura $T_2 = 600 \text{ K}$, presiunea $p_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, avînd căldura molară izocoră $C_{v2} = 5R/2$ ($R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$).

1. Să se afle temperatura de echilibru a amestecului gazos după ce peretele despărțitor este îndepărtat.

2. Dacă vasul are volumul $V = 600 \text{ l}$, să se determine numărul de moli din fiecare gaz, presiunile parțiale și presiunea amestecului la echilibru.

3. Amestecul gazos este comprimat până ocupă jumătate din volumul vasului. Să se afle temperatura amestecului gazos în această stare comprimată. Se dă valoarea $2^{0.45} = 1,37$.

4. Variația energiei interne a amestecului gazos în procesul comprimării până la atingerea stării de la punctul 3 și lucrul mecanic efectuat la destinderea în vid până ce amestecul gazos ocupă în întregime volumul vasului.

C.1. Un galvanometru de rezistență $R_0 = 150 \Omega$ are o scală cu 100 diviziuni, fiecare diviziune reprezentând 10^{-6} A . Să se calculeze valoarea rezistenței R_x cu care trebuie șuntat aparatul pentru a putea măsura cu el curenți până la 10^{-3} A .

2. Un voltmetru are rezistența internă $R_0 = 100 \Omega/\text{V}$ și măsoară diferențe de potențial până la 100 V . Ce diferență de potențial maximă se va putea măsura cu aparatul după ce i se adaugă o rezistență adițională $R_a = 9 \cdot 10^4 \Omega$?

II.4. A. Mobilele A și B cu masele $m_A = 1 \text{ kg}$ și $m_B = 2 \text{ kg}$, aflate în același loc în repaus, pornesc simultan sub acțiunea forțelor F_A și respectiv F_B . Forța $F_A = 1 \text{ N}$ acționează timp de 30 secunde asupra corpului A , iar forța $F_B = 4 \text{ N}$ acționează timp de 10 secunde asupra corpului B . Forțele F_A și F_B acționează în același sens. Mobilele se deplasează pe un plan orizontal, fără frecare, până în momentul cînd se reîntîlnesc. Din momentul reîntîlnirii, deplasarea se face tot pe planul orizontal, dar cu coeficientul de frecare $\mu = 0,1$, același pentru ambele corpuri. Să se calculeze :

1. Distanțele parcurse de cele două corpuri până la momentele $t_1 = 10 \text{ s}$ și respectiv $t_2 = 30 \text{ s}$.

2. Distanța S și timpul t după care cele două corpuri se reîntîlnesc.

3. Distanțele parcurse de cele două corpuri după reîntîlnire și intervalele de timp de la reîntîlnire până la oprirea celor două corpuri.

4. Variația în timp a distanței ΔS dintre cele două corpuri. Se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. O bară de fier aflată la $t_1 = -20^\circ\text{C}$ cu lungimea $l = 50 \text{ cm}$, secțiunea $S = 10 \text{ cm}^2$, densitatea $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ și căldura specifică $c = 0,5 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$, este încălzită într-o instalație cu randamentul $\eta = 25\%$ prin consumarea a $m_c = 100 \text{ g}$ petrol cu puterea calorică $q = 40 \text{ MJ/kg}$. Pentru a împiedica dilatarea în lungime, bara este supusă unei compresiuni longitudinale. Să se determine :

1. Cantitatea de căldură primită de bară.

2. Masa barei.

3. Temperatura la care se încălzește bara.

4. Lungimea barei după încălzire, dacă s-ar dilata liber.

5. Forța care acționează longitudinal asupra barei pentru a-i menține lungimea inițială.

Se dau : coeficientul de dilatare liniară a fierului $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. Se neglijează variația densității cu temperatura.

C. Un condensator plan, cu vid între armături, are distanța dintre armături $d = 10$ mm și suprafața unei armături $S = 100$ cm². Știind că tensiunea aplicată condensatorului este $U = 200$ V și că între armături se poate mișca un electron, se cere :

1. Capacitatea condensatorului și intensitatea cîmpului electric dintre armături.

2. Numărul de sarcini elementare aflate pe fiecare armătură a condensatorului.

3. Forța exercitată de cîmpul electric asupra electronului.

4. Timpul necesar pentru ca electronul să străbată distanța dintre armături sub acțiunea cîmpului electric.

Se dau : permitivitatea vidului $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12}$ F/m, sarcina elementară $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, masa electronului $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

II.5. A. Un corp de masă $m = 3$ kg se mișcă cu frecare pe un plan orizontal sub acțiunea unei forțe $F = 12\sqrt{2}$ N, care face un unghi $\beta = \pi/4$ cu orizontala. După parcurgerea distanței $d = 200$ m de la plecarea din repaus, corpul ajunge la baza unui plan înclinat, cu unghiul de înclinare $\alpha = \beta$ față de orizontală. Aici, după încetarea acțiunii forței F , corpul ciocnește plastic un corp identic aflat în repaus la baza planului înclinat. În urma ciocnirii, cele două corpuri se urcă împreună, cu frecare, pe planul înclinat pînă la înălțimea h . Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,5$ este același pe ambele plane ($g = 10$ m/s²). Să se determine :

1. Lucrul mecanic efectuat de forța F asupra corpului.

2. Lucrul mecanic al forței de frecare la mișcarea corpului pe planul orizontal.

3. Lucrul mecanic total efectuat asupra corpului la mișcarea pe planul orizontal.

4. Viteza v cu care ajunge corpul la baza planului înclinat (viteza înainte de ciocnirea plastică).

5. Viteza u a corpurilor imediat după ciocnirea plastică.

6. Cantitatea de căldură Q degajată în urma ciocnirii.

7. Înălțimea la care se ridică cele două corpuri după ciocnire.

8. Distanța străbătută de cele două corpuri pînă la oprirea pe planul orizontal (măsurată de la baza planului înclinat).

9. Presupunem cantitatea de căldură Q de la punctul 6 ca fiind de n ori mai mică decît cantitatea de căldură Q_1 primită de o mașină termică Carnot de la sursa caldă care are temperatura T_1 de $k = 6$ ori mai mare decît temperatura izvorului rece T_2 . Suprafața ciclului Carnot fiind $L = 500$ kJ, să se determine n .

B. Un punct material avînd sarcina electrică $q = 1,5$ nC și masa $m = 1$ mg se găsește deasupra sarcinii punctiforme fixe $Q = 6$ nC, situată pe aceeași verticală. Să se determine :

1. Intensitatea cîmpului electric și potențialul electric produse de sarcina punctiformă Q la distanța $d = 10$ cm de aceasta.

2. Distanța dintre sarcinile q și Q pentru care punctul material de sarcină q se găsește în echilibru deasupra sarcinii Q .

3. Distanțele de la sarcina Q pînă la care se depărtează, respectiv se apropie punctul material, dacă în poziția de echilibru i se imprimă — după direcția verticală — viteza $v_0 = 1$ m/s.

Se dă permitivitatea electrică a aerului $\epsilon_0 = (10^{-9}/36 \pi)$ F/m, $g = 10$ m/s².

II.6. A. De capetele unui fir, trecut peste un scripete, sînt legate corpurile de masă $m_1 = 100$ g și $m_2 = 150$ g. Furca scripetelui este legată

de tavanul unui ascensor. Să se calculeze tensiunea din furca scripetelui în următoarele cazuri :

1. Ascensorul este în repaus față de pământ.
 2. Ascensorul în mișcare pe verticală, rectiliniu și uniform.
 3. Ascensorul în urcare pe verticală cu accelerația $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$.
 4. Ascensorul în coborire pe verticală cu accelerația $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$.
 5. În ce caz tensiunea din furca scripetelui este egală cu zero ?
- Se consideră $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. Într-un cilindru, prevăzut cu un piston mobil, se află o masă de aer $m = 10 \text{ g}$, încălzită la presiunea constantă $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ cu un încălzitor electric cu rezistența $r = 3 \Omega$, străbătut timp de 6 minute de un curent de intensitate $I = 0,4 \text{ A}$. Se neglijează pierderile de căldură. Să se calculeze :

1. Numărul de molecule N din cilindru.
2. Variația de temperatură ΔT în urma încălzirii.
3. Deplasarea d a pistonului în urma încălzirii, dacă suprafața pistonului este $A = 20 \text{ cm}^2$.

4. În continuare, se fixează în această poziție pistonul și se încălzește aerul, ajuns la temperatura T_1 , până la T_2 . Care este cantitatea de gaz Δm care trebuie evacuată pentru ca presiunea să rămână neschimbată ?

Se dau : masa molară a aerului $\mu = 28,9 \text{ kg/kmol}$, căldura specifică la presiune constantă pentru aer $c_p = 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, numărul lui Avogadro $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, constanta gazelor perfecte $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$.

C.1. Două condensatoare electrice avind capacitățile $C_1 = 1 \mu\text{F}$ și $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ sînt legate în serie. Ansamblului format i se aplică o tensiune $U = 300 \text{ V}$. Să se determine sarcina electrică și diferența de potențial dintre armăturile fiecărui condensator.

2. În paralel cu condensatorul C_2 se leagă un al treilea condensator avind capacitatea $C_3 = 0,5 \mu\text{F}$. Să se determine sarcinile Q_i ($i = 1, 2, 3$) pe care le vor avea cele trei condensatoare și diferențele de potențial dintre armăturile fiecărui condensator.

II.7. A. Pe un șantier de construcție se utilizează un scripete mobil pentru manevrarea unor materiale prin ridicare și coborire pe o înălțime $h = 20 \text{ m}$, conform figurii II.7.A. Corpul ridicat împreună cu containerul are masa $m_1 = 750 \text{ kg}$ iar la coborire containerul

rămas gol are masa $m_2 = 50 \text{ kg}$. Se presupune că la coborire pînă la jumătate din înălțimea h , masa m_2 are o mișcare uniform accelerată cu accelerația $g = 10 \text{ m/s}^2$. Containerul este legat de scripetele mobil printr-un cablu de oțel care are modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ și secțiunea $S = 0,5 \text{ cm}^2$. Sistemul de scripete este acționat de un motor. Să se calculeze :

1. Forța ce trebuie dezvoltată de motor cînd sarcina de masă m_1 este ridicată uniform și cînd aceasta este ridicată uniform accelerat cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$.

2. Forța de frinare dezvoltată de motor pentru care containerul de masă m_2 să coboare ultima jumătate din înălțimea h , uniform încetinit, astfel încît să atingă solul cu viteză nulă.

3. Alungirea relativă a cablului la ridicarea uniformă și la ridicarea uniform accelerată a sarcinii de masă m_1 .

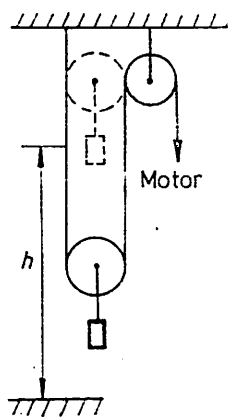


Fig. II.7.A

4. Lucrul mecanic efectuat de motor la ridicarea uniformă și uniform accelerată a masei m_1 .

5. Timpul în care se efectuează ridicarea masei m_1 în mișcarea uniformă, dacă puterea debitată de motor în acest caz este $P = 5 \text{ kW}$.

B. Într-un recipient închis etanș cu ajutorul unui piston mobil se găsesc $\nu = 3 \text{ mol}$ heliu menținut la presiune constantă $p = 10^5 \text{ Pa}$ și temperatura inițială $T_1 = 300 \text{ K}$. Cantitatea de heliu din recipient este încălzită izobar până când volumul gazului devine $V_2 = 99,72 \text{ l}$. Să se determine:

1. Volumul inițial V_1 al gazului din recipient.
2. Temperatura T_2 a gazului după încălzire.
3. Lucrul mecanic L efectuat de gaz prin dilatare în cursul încălzirii izobare.

4. Cantitatea de căldură primită de gaz în cursul încălzirii de la temperatura T_1 la T_2 , considerind că mărirea energiei interne a heliului ($U_2 - U_1$) — în condițiile menționate — se datorează creșterii energiei cinetice medii a moleculelor din întreaga cantitate de gaz din recipient.

C. Trei sfere metalice, goale în interior, formînd trei straturi sferice subțiri au, respectiv, razele $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 2 \text{ cm}$ și $R_3 = 4 \text{ cm}$. Sfera de rază R_1 are o sarcină electrică $q_1 = 1 \text{ nC}$, iar sfera mijlocie $q_2 = (5/3) \text{ nC}$. Straturile sferice sînt dispuse concentrice, în vid, stratul exterior fiind legat la pămînt. Să se calculeze potențialul sferelor interioare.

II.8. A. Un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45^\circ$ față de orizontală se mișcă rectiliniu cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$ în direcție orizontală (fig. II.8.A). Pe planul înclinat se deplasează cu frecare, $\mu = 0,3$, un corp cu masa $m_1 = 2 \text{ kg}$ de care este legat cu un fir inextensibil, trecut peste scripetele S , un al doilea corp cu masa $m_2 = 4 \text{ kg}$. Știind că mișcarea corpului m_2 decurge pe verticală cu frecare pe fața verticală a prisme planului înclinat ($\mu = 0,3$), să se determine:

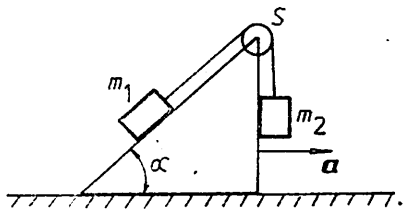


Fig. II.8.A

1. Accelerația a_1 a ansamblului format din cele două corpuri, față de planul înclinat.

2. Tensiunea din firul de legătură, în cazul de la punctul precedent.
3. Valoarea accelerației planului înclinat, a , pentru ca ansamblul format din cele două corpuri să rămână în repaus față de planul înclinat. Se consideră $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. O mașină termică ideală efectuează un lucru mecanic $L = 1676 \text{ J}$, absorbind de la sursa caldă, aflată la temperatura $t_1 = 200^\circ\text{C}$, o cantitate de căldură egală cu 4180 J . Să se calculeze:

1. Randamentul mașinii și temperatura t_2 a sursei reci.
2. Puterea utilă a mașinii dacă ea consumă într-o oră $m = 5 \text{ kg}$ benzină cu puterea calorică $q = 48 \text{ MJ/kg}$.
3. Volumul ocupat de $m_0 = 56 \text{ g}$ azot ce servește drept agent termic în mașină, aflat la presiunea $p = 2 \text{ atm}$ și temperatura t_1 .
4. Energia cinetică medie și viteza pătratică medie a moleculelor de azot la temperatura t_2 .

Se dau: masa molară a azotului $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$, $R = 8314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, numărul lui Avogadro $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$.

C. Două sfere metalice goale, cu pereți subțiri și de raze R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$), sunt așezate concentrice, în vid. Să se determine :

1. Sarcinile q_1 și q_2 de pe fețele exterioare ale celor două sfere, acestea aflându-se la potențialele V_1 și respectiv V_2 .

2. Densitățile superficiale de sarcină de pe cele două sfere.

3. Intensitatea câmpului electric și potențialul electric într-un punct M aflat pe semiaxa Ox la distanța $OM = x$ de centrul comun O al celor două sfere.

II.9. A. Un corp de masă $m = 0,2$ kg este suspendat printr-un fir de lungime $l = 1$ m și secțiune $S = 0,2$ mm². Corpului i se imprimă o mișcare de rotație într-un plan orizontal, astfel încât firul descrie un con, făcând cu verticala un unghi $\alpha = 30^\circ$. Să se calculeze :

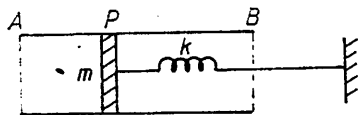


Fig. II.9.B

1. Perioada mișcării de rotație.

2. Tensiunea din fir.

3. Alungirea firului, dacă acesta este extensibil, avind modulul de elasticitate $E = 10^{11}$ N/m².

4. Tensiunea maximă suportată de fir, dacă acesta se rupe cînd corpul efectuează 60 de rotații pe minut.

5. Dacă firul se rupe și corpul se deplasează pe o masă orizontală cu frecare ($\mu = 0,2$), care este durata acestei deplasări și distanța parcursă ($g = 10$ m/s²).

B.1. Un piston cu masă $m = 10$ kg, legat prin intermediul unui resort elastic ($k = 1$ kN/m) de un punct fix, oscilează fără frecare în interiorul unui tub orizontal AB (fig. II.9.B). Să se calculeze viteza pistonului după timpul $t = (41 \pi/4)$ s de la începerea oscilației, dacă amplitudinea oscilației este $A = 20$ cm. Pistonul pornește din poziția sa de echilibru.

2. Pistonul fiind în repaus în poziția P , iar resortul nedeformat, se închide tubul la capătul A , aerul din interiorul tubului aflîndu-se la temperatura $t_0 = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p_0 = 100$ kPa. Să se determine forța suplimentară necesară pentru a menține pistonul blocat în poziția P , dacă aerul din interior este încălzit cu $\Delta T = 600$ K. Secțiunea tubului este $S = 2$ dm².

3. Deblocînd pistonul și menținînd temperatura constantă, să se calculeze cu cit se deplasează pistonul pînă în noua lui poziție de echilibru, dacă $AP = l = 1$ m.

C.1. Un conductor avînd forma unui inel de rază $r = 10$ cm are o sarcină electrică $Q = 10$ μC . Să se afle intensitatea câmpului electric într-un punct aflat la distanța x de centrul inelului, pe axa perpendiculară pe planul inelului, care trece prin centrul lui.

2. În punctul cel mai de sus al inelului se leagă un fir subțire de mătase care are la celălalt capăt o sferă metalică mică de masă $m = 0,15$ g, avînd sarcina $q = 1$ nC. Să se determine lungimea l a firului de suspensie pentru care poziția finală a centrului sferei se află într-un punct pe axa inelului. Sistemul este situat în aer ($\epsilon_r = 1$).

II.10. A. Un corp de masă $m_2 = 4$ kg este așezat pe un al doilea corp de masă $m_1 = 6$ kg, legat la rîndul său de un resort orizontal de constantă elastică $k = 500$ N/m (fig. II.10.A). Știînd că — resortul fiind nedeformat — se imprimă ansamblului format din cele două corpuri viteza ini-

țială orizontală $v_0 = 1$ m/s, precum și faptul că între corpul de masă m_2 și planul orizontal nu există frecare, să se calculeze :

1. Amplitudinea oscilațiilor ansamblului format din cele două corpuri, dacă acestea se mișcă împreună.
2. Energia potențială maximă și accelerația maximă a ansamblului celor două corpuri.
3. Forța de frecare minimă și coeficientul de frecare minim pentru ca în timpul oscilațiilor corpul de masă m_2 să nu alunece de pe corpul de masă m_1 .

Se va considera $g = 10$ m/s².

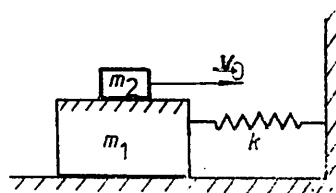


Fig. II.10.A

B. Într-un vas cilindric, de volum $V = 25 \cdot 10^{-2}$ m³, se află un amestec gazos, format din dioxid de carbon și vapori de apă la temperatura $T = 600$ K. Numărul moleculelor de dioxid de carbon este $N_1 = 6,6 \cdot 10^{21}$, iar numărul moleculelor de vapori de apă este $N_2 = 0,9 \cdot 10^{21}$. Să se afle :

1. Presiunea exercitată asupra pereților vasului și presiunile parțiale.
2. Energia cinetică medie a moleculelor din vas și vitezele termice ale moleculelor de dioxid de carbon și ale moleculelor de vapori de apă.
3. Volumele ocupate de fiecare gaz dacă acestea ar fi separate printr-un piston mobil.

Se dau $R = 8314$ J/kmol · K, $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹, $\mu_{CO_2} = 44$ kg/kmol, $\mu_{vapori H_2O} = 18$ kg/kmol.

C. Două, sfere identice, mici, situate în aer, având fiecare masa $m = 0,1$ g sînt suspendate în același punct cu ajutorul a două fire izolate, de masă neglijabilă și avînd aceeași lungime $l = 20$ cm.

1. Care este valoarea sarcinilor egale ale celor două sfere pentru ca unghiul format de cele două fire să fie $\alpha = 90^\circ$ ($\epsilon_r = 1$)?

2. Care va fi valoarea unghiului β dintre cele două fire după scufundarea sistemului de la punctul 1 în petrol ($\rho_0 = 800$ kg/m³, $\epsilon_r = 2$), dacă densitatea materialului din care sînt confecționate sferele este $\rho = 990$ kg/m³?

3. Se introduce sistemul în ulei ($\epsilon_r = 5$, $\rho_0 = 900$ kg/m³). Care trebuie să fie densitatea materialului sferelor pentru ca unghiul dintre firele de suspensie să rămînă egal cu cel din aer?

4. După un timp, datorită efluviilor, electrizarea sistemului descris la punctul 1 scade și sferele se apropie.

Să se calculeze cu cît s-a micșorat sarcina fiecărei sfere pînă în momentul cînd unghiul dintre firele de suspensie devine $\alpha_1 = 60^\circ$.

II.11. A. Un automobil avînd viteza $v_1 = 54$ km/h începe să se deplaseze uniform accelerat și după parcurgerea distanței $l_1 = 500$ m pe un drum rectiliniu, intră într-o curbă cu viteza $v_2 = 72$ km/h, păstrîndu-și viteza constantă pe toată lungimea $l_2 = 600$ m a curbei care este un arc de cerc cu unghiul la centru de 90° . Masa automobilului este $m = 2$ t, iar coeficientul de frecare pe întregul drum este $\mu = 0,2$. Să se calculeze :

1. Forța de tracțiune dezvoltată de motor pe primii 500 de metri.
2. Forța centrifugă la mișcarea în curbă.
3. Timpul în care se parcurge distanța $l_1 + l_2$.

4. Viteza v , la care apare alunecarea laterală și viteza v_r la care automobilul se răstoarnă. Distanța dintre roțile automobilului este $d = 1,5$ m, iar poziția centrului de greutate este la înălțimea $h = 0,8$ m ($g = 10$ m/s²).

B. Să se stabilească expresia presiunii pe care o exercită un fascicul molecular asupra unui ecran mobil. Viteza ordonată a moleculelor din fascicul, față de pământ, este u , concentrația moleculelor din fascicul este n_0 , masa unei molecule m_0 , iar ecranul se mișcă normal spre fascicul cu viteza relativă v față de pământ. Fasciculul molecular și ecranul au aceeași temperatură. Ciocnirile sînt perfect elastice.

C. Trei surse electrice avînd tensiunile electromotoare $E_1 = 1$ V, $E_2 = 1,1$ V și $E_3 = 1,2$ V și rezistențele interne $r_1 = 2$ Ω , $r_2 = 3$ Ω respectiv $r_3 = 1$ Ω sînt conectate în paralel. La bornele comune A și B ale surselor este legat un rezistor cu rezistența $R = 20$ Ω , prin care trece un curent electric de intensitate I . Se cere :

1. Să se calculeze intensitatea I a curentului electric prin rezistența R .

2. Dacă sursa de tensiune electromotoare E_3 este scoasă din circuit, să se exprime intensitățile curenților prin celelalte două surse, respectiv prin rezistorul R , în funcție de E_1 , E_2 , r_1 , r_2 și R și să se calculeze aceste intensități.

3. Tensiunea electrică pe care o va arăta un voltmetru conectat între bornele A și B, în condițiile punctului precedent, dacă rezistența voltmetrului este $R_v = 2$ k Ω .

II.12. A. Pe o masă orizontală, netedă, este așezat un cub de masă $M = 10$ kg. Pe cub se află un alt corp de masă $m_1 = 1$ kg, legat printr-un fir

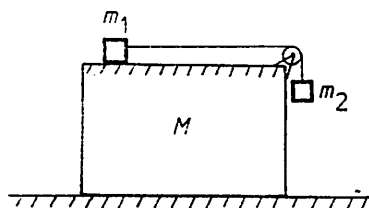


Fig. II.12.A

orizontal, trecut peste un scripete ideal, de un alt corp de masă $m_2 = 4$ kg, situat la înălțimea $h = 1,5$ m deasupra mesei (fig. II.12.A). Între cub și masă și între corpul m_1 și cub nu există frecare. Lăsînd liber sistemul, cu cît se deplasează cubul M pînă în momentul în care corpul m_2 atinge masa ?

B. Într-un recipient care este format din două incinte de volume V_1 , respectiv V_2 , ce comunică între ele printr-un tub prevăzut cu un robinet, se află un gaz ideal cu masa totală m . Robinetul fiind închis, presiunea și temperatura gazului din cele două incinte sînt p_1 , T_1 , respectiv p_2 , T_2 ($p_2 > p_1$, $T_2 > T_1$).

Să se determine valoarea parametrilor de stare ai gazului din recipient în starea finală, în următoarele cazuri :

1. Se deschide robinetul de comunicație, menținînd constantă temperatura din fiecare incintă, cu ajutorul unor termostate.

2. Se deschide robinetul de comunicație, recipientul fiind izolat termic de mediul exterior.

C. Două generatoare de curent continuu, cu aceeași rezistență interioară $r_i = 1$ Ω , sînt legate în paralel și alimentează un rezistor cu rezistența $R = 2$ Ω . Știînd că unul din generatoare are o tensiune electromotoare $E = 12$ V, să se calculeze :

1. Valoarea tensiunii electromotoare a celui alt generator pentru ca acesta să debiteze la borne o putere cu $f = 50\%$ mai mare decît puterea debitată la borne de primul generator.

2. Puterea totală și puterea debitată în exterior de către fiecare generator.

II.13. A. Două bile de mase $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 300 \text{ g}$ pot oscila de-a lungul unei tije netede sub acțiunea unor resorturi identice. Tija este fi-

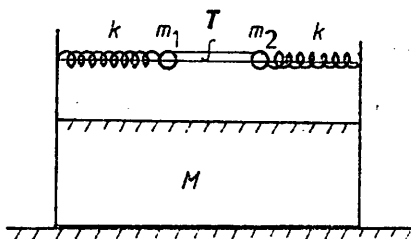


Fig. II.13.A

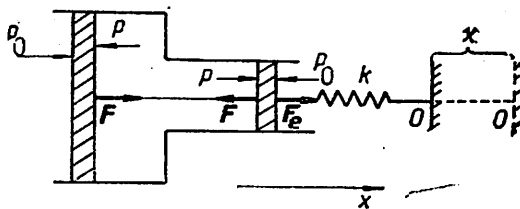


Fig. II.13.B

xată pe un suport de masă $M = 1 \text{ kg}$. Inițial bilele sînt legate între ele printr-un fir, tensiunea din fir fiind $T = 3 \text{ N}$. Ce coeficient de frecare minim este necesar între suportul M și masă pentru ca suportul să nu alunece în timpul oscilațiilor bilelor după ce se arde firul de legătură? (fig. II.13.A).

B. Sistemul din figura II.13.B, aflat în echilibru, conține un gaz la presiune și temperatură egală cu presiunea și temperatura aerului exterior, adică $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$, $T_0 = 300 \text{ K}$. Pistoanele sînt legate printr-o tijă rigidă de lungime l și pot să se deplaseze fără frecare. Aria pistoanelor este $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$ și $S_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Pistonul din dreapta de arie S_1 este legat de un punct O printr-un resort, avînd constanta elastică $k = 400 \text{ N/m}$, care în starea inițială nu este deformat. Aerul din incintă se încălzește cu $\Delta T = 100 \text{ K}$. Să se determine:

1. În ce parte și pe ce distanță trebuie deplasat punctul O pentru ca poziția pistoanelor să nu se modifice.
2. Lucrul mecanic efectuat.

C. Se dă circuitul electric din figura II.13.C, în care: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $E = 60 \text{ V}$, $r = 0,2 \Omega$. Să se calculeze:

1. Curenții electrici din ramurile circuitului electric.

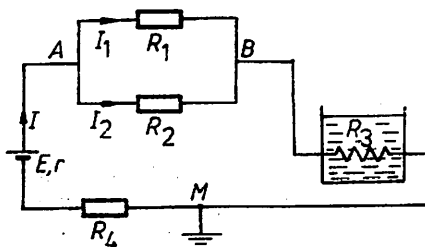


Fig. II.13.C

2. Potențialele punctelor A și B ale circuitelor față de punctul M , precum și diferența de potențial între punctele A și B .

3. Bilanțul energetic din circuit.

4. Cantitatea de apă care se poate încălzi de la temperatura $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ la temperatura $\theta = 100^\circ\text{C}$ în timpul $t = 1 \text{ h}$, dacă rezistorul R_3 trece printr-un fierbător cu randamentul $\eta = 0,80$. Căldura specifică a apei $c = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

II.14. A. Un corp de masă m se află pe o suprafață orizontală pe care se poate deplasa fără frecare. Corpul este legat printr-un resort orizontal cu constanta elastică k . Lungimea arcului în stare netensionată este x_0 (fig. II.14.A). Începînd cu $t_0 = 0$, asupra corpului acționează forța constantă F . Să se calculeze :

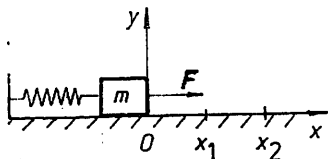


Fig. II.14.A

1. Deplasarea maximă de la poziția de echilibru, sub acțiunea forței F .

2. Deplasarea maximă de la poziția de echilibru, dacă forța F crește foarte încet de la 0 la F .

B. Un tub cilindric orizontal de secțiune constantă S , închis la capete, este împărțit în compartimente egale cu ajutorul a $n - 1$ pistoane identice de masă m , care se pot mișca fără frecare.

Inițial, presiunea în toate compartimentele este aceeași, egală cu p . Să se afle presiunea din fiecare compartiment cînd tubul este adus în poziție verticală, dacă se constată că, în acest caz, între volumele celor n compartimente există relațiile : $V_2 = 2V_1$; $V_3 = 3V_1$; ... ; $V_n = nV_1$.

C. O sursă de curent continuu de tensiune electromotoare E și rezistență interioară $r = 1 \Omega$ este conectată la o rezistență exterioară R , în care face să circule un curent $I = 100 \text{ mA}$ și în care dezvoltă o putere $P = 2 \text{ W}$. Dacă la bornele rezistenței R se leagă în paralel un condensator C , acesta se încarcă cu sarcina $q = 25 \text{ nC}$. Se cere :

1. Tensiunea la bornele rezistenței R și valoarea acestei rezistențe.
2. Tensiunea electromotoare E a sursei.
3. Capacitatea C a condensatorului.
4. Frecvența proprie de oscilație a unui circuit serie format din condensatorul C și o bobină cu inductanța $L = 12,8 \text{ mH}$.

II.15. A. Un corp de masă m este legat printr-un resort, cu constanta elastică k , de un perete fix. Corpul este deplasat din poziția de echilibru spre dreapta (fig. II.15.A) (resortul se comprimă) cu o distanță d_2 , iar apoi este lăsat liber. Corpul se va deplasa înapoi spre stînga, ciocnindu-se elastic de un alt perete fix situat la distanța d_1 ($d_1 < d_2$). După ciocnire corpul se va deplasa iar spre dreapta pînă în A ș.a.m.d. Să se afle perioada oscilațiilor (se neglijează frecarea).

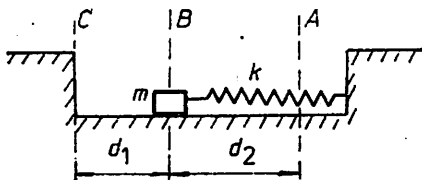
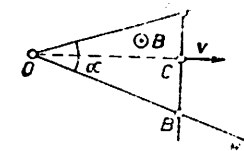


Fig. II.15.A



g. II.15.C

B. Un gaz ideal, monoatomic, ocupă un volum $V_1 = 0,3 \text{ m}^3$ la presiunea $p_1 = 30 \text{ kPa}$ și temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Gazul efectuează o transformare care verifică ecuația $p = aV$ cu $a = \text{const.}$, ocupînd în starea finală un volum de $n = 3$ ori mai mare. Să se determine :

1. Presiunea și temperatura în starea finală.
2. Lucrul mecanic efectuat de gaz.
3. Variația energiei interne a gazului și căldura absorbită de gaz în această transformare.

C. Un conductor MON este așezat într-un câmp de inducție magnetică uniform $B = 1,5 \text{ T}$ perpendicular pe planul său, avînd sensul liniilor de câmp dinspre planul hîrtiei spre observator (fig. II.15.C). Un alt conduc-

tor AB , situat perpendicular pe bisectoarea OC a unghiului $\alpha = 60^\circ$ făcut de brațele OM și ON ale conductorului MON și sprijinindu-se pe brațele OM și ON , se mișcă avînd viteza uniformă $v = 5 \text{ m/s}$ de la punctul O spre C . Se cere :

1. Să se calculeze valoarea tensiunii electromotoare induse în circuitul $OABO$ și să se indice sensul acesteia.

2. Să se arate că intensitatea curentului care ia naștere în circuitul $OABO$ nu depinde de lungimea acestui circuit. Să se calculeze intensitatea curentului, știind că rezistența electrică raportată la unitatea de lungime este aceeași $r = 0,1 \text{ } \Omega/\text{m}$, pentru cele trei conductoare OA , AB și BO .

3. Forța mecanică care acționează asupra conductorului AB în momentul $t = 0,5 \text{ s}$ de la începutul mișcării conductorului AB de la punctul O spre C ?

II.16. A. Un corp de masă $m = 40 \text{ kg}$ este suspendat ca în figura II.16.A. Să se afle :

1. Forțele ce se exercită datorită greutateii corpului de masă m în bara BC și cablul AB , dacă $AB = 0,3 \text{ m}$ și $AC = 0,4 \text{ m}$.

2. Timpul în care corpul ajunge la sol și viteza cu care atinge solul în ipoteza că firul de susținere se rupe sub efectul greutateii, înălțimea la care se află corpul față de sol este $h = 10 \text{ m}$.

3. Înălțimea h' față de sol la care energia cinetică a corpului în cădere liberă este egală cu un sfert din energia lui potențială în acel moment, măsurată față de sol ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

B. O cantitate $\nu = 2 \text{ kmol}$ gaz ideal se găsește într-o incintă în care temperatura gazului variază liniar cu înălțimea z : $T(z) = T_0 + a \cdot z$, presiunea gazului fiind aceeași în toată incinta. Se cere :

1. Să se deducă dependențele densității gazului, energiei cinetice medii și vitezei pătratice medii a moleculelor de înălțime, în interiorul incintei.

2. Știind că după uniformizarea temperaturii în incintă, gazul ajunge la temperatura $T_1 = 400 \text{ K}$ și presiunea $p_1 = 332,4 \text{ kPa}$, să se determine volumul incintei.

3. Dacă gazul din incintă este apoi evacuat, sub acțiunea propriei presiuni, în atmosferă, să se afle energia internă pe care o avea în incintă gazul care a fost evacuat.

Se dau : masa molară a gazului $\mu = 20 \text{ g/mol}$, presiunea atmosferică $p_a = 100 \text{ kPa}$ și $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$.

C. Un condensator variabil cu capacitatea maximă C_0 încărcat la tensiunea U_0 este conectat printr-un comutator K la bornele unui rezistor R (fig. II.16.C).

1. Să se stabilească expresia variației în timp a capacității condensatorului pentru ca prin circuit să treacă un curent de intensitate constantă.

2. Care este puterea consumată sub acțiunea forțelor exterioare pentru modificarea capacității condensatorului, cunoscînd că $U_0 = 10 \text{ V}$ și $R = 50 \text{ k}\Omega$.

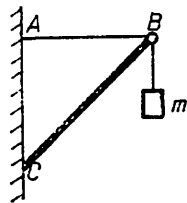


Fig. II.1.A

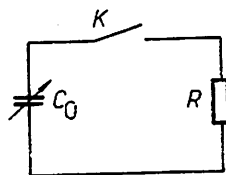


Fig. II.16.C

II.17. A. Din punctele A_1 și A_2 situate la distanța $d = 200 \text{ m}$ pleacă simultan, în același sens, două mobile. Cel din față are o mișcare uniform

accelerată cu viteza inițială $v_{02} = 10 \text{ m/s}$ și accelerația $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$, iar cel din urmă are o mișcare uniformă cu viteza $v_1 = 40 \text{ m/s}$.

1. După cât timp și unde s-au întâlnit cele două mobile.
2. Ce viteze au mobilele în timpul întâlnirii.
3. După cât timp de la plecare vitezele mobilelor sînt egale.
4. După cât timp de la plecare distanța dintre mobile se reduce la jumătate.
5. După cât timp distanța dintre mobile este egală, din nou, cu distanța inițială.

B. Un cilindru cu secțiunea $S = 20 \text{ cm}^2$ conține aer la presiunea atmosferică $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ și la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Cilindrul este așezat orizontal, aerul fiind limitat de un piston aflat inițial la $0,5 \text{ m}$ de fundul cilindrului. Pistonul este legat de un resort, fixat la celălalt capăt și avînd constanta elastică $k = 2000 \text{ N/m}$. Între piston și pereții cilindrului nu există frecări.

1. Cu cât se deplasează pistonul dacă aerul din cilindru se încălzește cu 100°C ? Dar dacă aerul este răcit cu 100°C ?

2. Să se exprime și să se reprezinte grafic temperatura aerului din cilindru în funcție de variația lungimii coloanei de aer pentru $t > 27^\circ\text{C}$.

3. Ce inconveniente ar exista la utilizarea acestui dispozitiv ca termometru?

C. O bobină de inductanță $L = (10/\pi) \text{ mH}$ și rezistență $R = 225 \Omega$ este conectată în serie cu un condensator plan de capacitate $C = (40/\pi) \text{ nF}$, la o tensiune continuă $U_c = 240 \text{ V}$. Să se calculeze:

1. Permitivitatea dielectricului condensatorului, știind că aria armăturilor este $S = 160 \text{ cm}^2$, iar distanța dintre armături este $d = 0,11 \text{ mm}$.

2. Sarcina cu care se încarcă acest condensator.

3. Pulsația și frecvența proprie a circuitului.

4. Dacă se înlocuiește tensiunea continuă cu o tensiune alternativă $u = U_m \sin \omega t$, avînd frecvența $\nu = 20 \text{ kHz}$ și $U_m = 4,5 \text{ V}$, să se calculeze valoarea efectivă a curentului și defazajul față de tensiune.

II.13. A. Un corp alunecă liber pe un plan inclinat care face unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și plan este $\mu = 0,2$. Pe plan se află un obstacol de care corpul se ciocnește frontal și perfect elastic. Corpul fiind situat inițial la distanța $l_0 = 2,5 \text{ m}$ de obstacol, să se determine:

1. Accelerațiile corpului la coborîre și la urcare pe planul inclinat.
2. Viteza corpului imediat după a doua ciocnire cu obstacolul.
3. Înălțimea maximă la care urcă corpul după a doua ciocnire.
4. Lucrul mecanic al forțelor de frecare pînă la a doua ciocnire cu obstacolul.

B. U_0 corp cu masa $m = 10 \text{ g}$ oscilează conform ecuației: $y = 0,5 \sin 2\pi(5t + 1/6) \text{ m}$.

Să se determine:

1. Frecvența și faza inițială a mișcării oscilatorii.
2. Momentele la care elongația este egală cu $\sqrt{3}/2$ din amplitudine.
3. Energia cinetică și potențială în aceste momente.
4. Dacă oscilatorul dă naștere unor unde care se propagă într-un mediu elastic cu viteza de fază $v_f = 340 \text{ m/s}$, să se găsească defazajul dintre oscilațiile a două puncte situate pe aceeași dreaptă cu oscilatorul și aflate la distanțele $x_1 = 2 \text{ m}$ și $x_2 = 87 \text{ m}$ de oscilatorul sursă.

C. Două gaze perfecte avind aceeași căldură molară izocoră, $C_v = 3R/2$, se găsesc primul într-un vas de volum $V_1 = 8,31$ l, la presiunea $p_1 = 100$ kPa și temperatura $T_1 = 300$ K, al doilea într-un vas de volum $V_2 = 1,662$ l, la presiunea $p_2 = 200$ kPa și temperatura $T_2 = 400$ K. Să se determine :

1. Energiile cinetice medii ale moleculelor celor două gaze în starea inițială.

2. Exponentul adiabatic al gazelor.

3. Temperatura finală a amestecului, după deschiderea robinetului situat pe tubul de volum neglijabil care unește cele două vase și presiunile parțiale ale gazelor în starea finală.

Se dau : constanta gazelor perfecte $R = 8,31$ J/mol · K, numărul lui Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹.

D. Se consideră două circuite distincte : primul constă dintr-o sursă de tensiune electromotoare cu o frecvență oarecare, o bobină cu inductanța L și o rezistență oarecare R în serie ; al doilea circuit cuprinde aceeași sursă, aceeași rezistență și un condensator C legate în serie. Care trebuie să fie relația dintre R , L , C pentru ca defazajele în cele două circuite (în valoare absolută) să fie complementare ?

II.19. A. Șoferul unui automobil vrea să depășească un camion care circulă cu viteza constantă $v_0 = 20$ m/s. La această viteză, accelerația maximă a automobilului este $a = 0,5$ m/s². Inițial vehiculele erau la distanța $d_1 = 25$ m unul de altul, viteza automobilului fiind în acel moment v_0 . Automobilul revine pe banda de circulație a camionului cînd ajunge la $d_2 = 25$ m în fața camionului. Lungimea automobilului este $l_1 = 4$ m iar a camionului $l_2 = 27$ m.

1. Cît timp îi trebuie automobilului pentru a depăși camionul ?

2. Ce distanță parcurge automobilul în acest timp ?

3. Care este viteza finală a automobilului, dacă accelerația lui rămîne tot timpul constantă ?

B. Într-un radiator de calorifer temperatura apei la intrare este $t_1 = 87^\circ\text{C}$, iar la ieșire $t_2 = 30^\circ\text{C}$. Se înlocuiește agentul termic (apa) cu vaporii de apă saturați. La intrarea în radiator vaporii de apă au presiunea $p = 1$ atm. Vaporii se condensează și din radiator iese apă la $t_3 = 70^\circ\text{C}$. Să se determine :

1. Masa m a vaporilor care dau aceeași căldură ca 1 kg de apă în primul caz.

2. Volumul vaporilor corespunzător punctului 1, la intrarea în radiator, dacă vaporii de apă se consideră gaz perfect.

3. Debitul masic mediu al vaporilor de apă care trebuie să intre în radiator, pentru a menține constantă temperatura camerei, dacă pierderile de căldură prin pereți corespund unei puteri de 2,385 kW.

4. Numărul de molecule din masa m de vaporii și energia cinetică medie a fiecărei molecule.

Se dau : căldura latentă specifică de vaporizare a apei $\lambda = 22,6 \cdot 10^5$ J/kg, căldura specifică a apei $c = 4185$ J/kg · K, masa molară a apei $\mu = 18$ g/kmol.

C. În virfurile A , B , C ale unui triunghi echilateral cu latura $a = 16$ cm se află trei conductoare paralele, perpendiculare pe planul triunghiului ABC . Prin B și C curenții sînt de același sens și au intensități

egale $I_B = I_C = 4 \text{ A}$. Prin A curentul are intensitatea $I_A = 8 \text{ A}$ și este de sens contrar celorlalți. Să se afle :

1. Forța pe unitatea de lungime care se exercită asupra fiecărui conductor.

2. Inducția magnetică în centrul triunghiului și în punctele situate la mijlocul laturilor triunghiului ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$, $\mu_r = 1$).

II.20. A. O barcă cu motor se deplasează pe o apă curgătoare între două localități A și B , dus și întors, în timpul $t = 3,5 \text{ h}$ (se neglijează timpul pierdut la întoarcerea bărcii în localitatea a doua). Distanța dintre localități este $d = 48 \text{ km}$, iar barca se deplasează față de apă cu aceeași viteză tot timpul mișcării.

1. Să se calculeze viteza bărcii față de apă și viteza medie a apei față de mal, cunoscând că mișcarea într-un sens, între cele două localități, durează cu $\tau = 0,5 \text{ h}$ mai puțin față de mișcarea în sens invers.

2. Comparați timpul dus-întors cu barca față de timpul dus-întors cu automobilul care ar parcurge exact aceeași distanță d cu aceeași viteză ca și a vasului față de apă.

B. Un corp poate fi menținut în echilibru pe un plan înclinat cu forța $F_1 = 5 \text{ N}$ paralelă cu planul sau cu forța $F_2 = 10/\sqrt{3} \text{ N}$ orizontală. Știind că între corp și plan nu există frecări, să se afle :

1. Greutatea corpului.

2. Unghiul format de plan cu direcția orizontală.

3. Reacțiunea normală a planului în cele două cazuri.

4. Care ar trebui să fie greutatea corpului, dacă coeficientul de frecare între corp și plan este $\mu = \sqrt{6}/5$?

C. În virfurile A , B și C ale unui pătrat cu latura $a = 30 \text{ cm}$ se află trei corpuri punctiforme cu sarcinile $Q_1 = 3\sqrt{2} \text{ nC}$, $Q_2 = -2 \text{ nC}$, respectiv $Q_3 = Q_1 = 3\sqrt{2} \text{ nC}$. Considerind $\epsilon_r = 1$, să se determine :

1. Intensitatea cîmpului electric creat de sarcinile Q_1, Q_2, Q_3 într-un punct oarecare aflat pe axa $x'x$ care trece prin virfurile B și D ale pătratului, alegînd ca origine centrul O al pătratului. Cazuri particulare : $x_1 = a/\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = -a/\sqrt{2}$.

2. Lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa un corp punctiform cu sarcina $Q_4 = 1 \text{ } \mu\text{C}$ din punctul D în centrul O al pătratului.

3. Dacă $Q_1 = Q_3 = 3\sqrt{2} \text{ nC}$, să se determine valoarea sarcinii Q'_2 astfel ca intensitatea cîmpului electric creat de sarcinile Q_1, Q'_2, Q_3 în virful D al pătratului să fie egală cu zero.

II.21. A. Pe o suprafață orizontală se află două corpuri așezate unul peste celălalt (fig. II. 21.A). Corpul A are masa $m_A = 0,4 \text{ kg}$, iar corpul B are

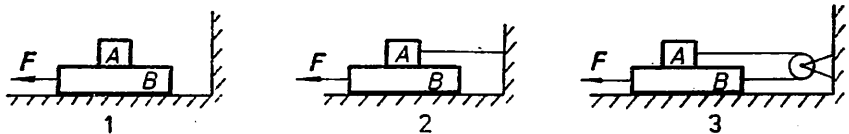


Fig. II.21.A

masa $m_B = 1,6 \text{ kg}$. Coeficientul de frecare la alunecare între corpurile A și B este $\mu_1 = 0,25$, iar între corpul B și suprafața orizontală este $\mu_2 =$

$= 0,2$. Să se calculeze forța F necesară pentru a mișca uniform spre stînga corpul B dacă :

1. Corpul A rămîne nemișcat față de corpul B , cele două corpuri mișcîndu-se împreună.
2. Corpul A este ținut în repaus prin intermediul unui fir.
3. Corpurile A și B sînt legate printr-un fir ușor, flexibil, trecut peste un scripete fără frecare.

B . Două vase sferice în care se află heliu sînt unite printr-un tub de volum neglijabil, prevăzut cu un robinet. Vasul doi are un diametru de 4 ori mai mare decît diametrul vasului unu. Inițial robinetul fiind închis, presiunea gazului din vasul 1 este $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$, temperaturile heliului în cele două vase $T_1 = 400 \text{ K}$, $T_2 = 200 \text{ K}$, iar raportul densităților $\rho_1/\rho_2 = 2 \cdot 10^3$. Să se calculeze :

1. Presiunea p_2 din vasul 2 în starea inițială.
2. Numărul molilor de heliu din vasul 1, după deschiderea robinetului și atingerea echilibrului, știind că temperaturile gazului din cele două vase sînt menținute constante și, în final, în vasul 2 se găsesc $v_2 = 6,4 \text{ kmol}$ heliu.
3. Numărul molilor de heliu din cele două vase în starea inițială.
4. Variația energiei interne a heliului între starea inițială și starea finală ($C_v = 3R/2$, $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$).

C . Se dă montajul din figura II.21.C în care se cunosc : $R_1 = 3 \Omega$ — care este o bobină cu lungimea $l = 8 \text{ cm}$, avînd un singur rînd de spire, bobinată spiră lîngă spiră din sîrmă de cupru cu diametrul $d = 0,4 \text{ mm}$; $R_2 = 2 \Omega$ — un rezistor; $R_3 = 8 \Omega$ — rezistența de încălzire a unui calorimetru cu apă; $R_5 = 1 \Omega$ — o baie pentru electroлизă în care se află

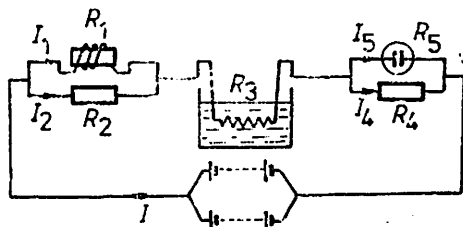


Fig. II.21.C

soluție de CuSO_4 și $R_4 = 4 \Omega$ — un rezistor. Circuitul este alimentat de o baterie formată din 16 elemente legate pe două ramuri, fiecare ramură avînd 8 elemente. Tensiunea electromotoare a fiecărui element este de $1,5 \text{ V}$ și rezistența interioară $0,5 \Omega$. Să se calculeze :

1. Intensitățile curenților pe fiecare ramură.
2. Cantitatea de cupru depusă, în timp t de 30 minute.
3. Cantitatea de apă ce se poate încălzi cu 10°C în 30 de minute.
4. Inducția magnetică în mijlocul bobinei și fluxul magnetic prin suprafața unei spire, dacă miezul este din fier cu permeabilitatea $\mu_r = 500$ (Se dă $\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ și echivalentul electrochimic pentru Cu, $K = 0,329 \text{ mg/C}$).

II.22. A. Pe o platformă aflată în mișcare uniformă cu viteza $v_0 = 36 \text{ km/h}$, se găsește un corp. Între corp și platformă coeficientul de frecare este $\mu = 0,15$. Dacă platforma se oprește pe o distanță $d = 25 \text{ m}$ (ca urmare a acțiunii unei forțe de frînare constantă), se cere :

1. Timpul pînă la oprirea platformei, din momentul acțiunii forței de frînare.
2. Accelerația corpului față de platformă.

3. Spațiul l_0 străbătut de corp pe platformă, până la oprirea platformei.

4. Cît trebuie să fie lungimea minimă a platformei pentru ca corpul să se oprească pe platformă în timpul frînării? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

B. Un motor termic cu gaz perfect funcționează după un ciclu reversibil format dintr-o destindere izotermă $A \rightarrow B$ la temperatura T_1 , urmată de o comprimare izobară $B \rightarrow C$ până la temperatura T_2 , apoi de o comprimare adiabatică $C \rightarrow D$ până la temperatura T_3 și — în fine — de o destindere izobară prin care se revine la starea inițială. Să se determine numai în funcție de temperaturile T_1, T_2, T_3 :

1. Randamentul η al motorului.

2. Temperatura T_r a izvorului rece al unui alt motor funcționând după un ciclu Carnot reversibil $ABC'D'A$ care include destinderea izotermă AB la temperatura T_1 , astfel ca lucrurile mecanice efectuate de o aceeași cantitate de gaz într-un ciclu $ABC'D'A$ al motorului Carnot, respectiv într-un ciclu $ABCD$ al motorului considerat, să fie egale.

3. Semnificația fizică a valorii raportului $\epsilon = (1 - \eta)/\eta$

C. Se consideră un oscilator armonic liniar format din două resorturi identice, perfect elastice, cu constanta elastică $k = 100 \text{ N/m}$ și corpul C de masă $m = 10 \text{ g}$, de care este prins un conductor de masă neglijabilă și lungime $l = 10 \text{ mm}$ (fig. II.22.C). Acest conductor poate aluneca

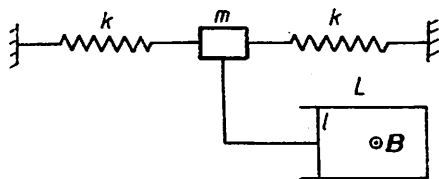


Fig. II.22.C

fără frecare pe un alt conductor de formă dreptunghiulară cu latura $L = 30 \text{ mm}$ (măsurată până la conductorul l , cînd sistemul se află în repaus). Planul în care se găsesc conductorii este perpendicular pe cîmpul magnetic de inducție $B = 100 \text{ mT}$.

Corpul C este scos din poziția de echilibru sub acțiunea unei forțe $F = 1 \text{ N}$ paralelă cu resorturile și apoi lăsat să oscileze liber. Se neglijează masa resorturilor, frecările oscilatorului și se face abstracție de prezența cîmpului gravitațional. Să se afle:

1. Amplitudinea A și frecvența ν a oscilațiilor.

2. Viteza maximă și energia cinetică maximă a oscilatorului.

3. Valorile maximă și minimă ale fluxului magnetic.

4. Legea de variație în timp a tensiunii electromotoare care ia naștere în circuitul format de cele două conductoare, precum și valoarea maximă a acestei tensiuni.

II.23. A. Mecanicul unui tren, care se deplasează uniform cu viteza $v_0 = 72 \text{ km/h}$ printr-un defileu, observă o bucată de stîncă în cădere liberă. El apreciază că dacă ar frîna pînă la oprire, piatra ar lovi locomotiva, iar dacă și-ar continua mersul uniform, piatra ar lovi ultimul vagon. De aceea hotărăște să accelereze. Știind că lungimea trenului este

$l = 100$ m și că piatra a căzut la distanța $d = 20$ m în urma trenului, să se calculeze :

1. La ce distanță față de punctul de cădere al pietrii a început să accelereze ?

2. Accelerația trenului.

3. La ce înălțime se află piatra în momentul trecerii locomotivei pe sub ea.

Se consideră $g = 10$ m/s².

B. O tijă cu lungimea de 1,05 m de greutate neglijabilă este suspendată la capete prin firele A și B de lungimi egale, așa cum se arată în figura II.23.B. Firele au secțiunile 1 mm² (firul A) și 2 mm² (firul B). Modulul lui Young pentru firul A este $2,4 \cdot 10^{11}$ N/m², iar pentru firul B este de $1,6 \cdot 10^{11}$ N/m². În ce punct de pe tijă trebuie suspendată o greutate G, pentru a produce :

1. Eforturi unitare egale în firele A și B.

2. Deformații specifice egale ale firelor A și B.

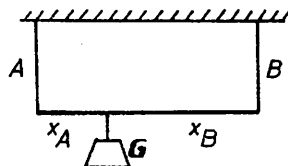


Fig. II.23.B

C. Se dă circuitul din figura II.23.C în care E , r , R_1 , R_2 și C se consideră cunoscute. Una din armăturile condensatorului este legată la mijlocul rezistorului R_1 , iar cealaltă este legată la un cursor K care se deplasează pe rezistorul de rezistență R_2 . Notînd cu x raportul în care este împărțită rezistența R_2 de cursorul K , se cere :

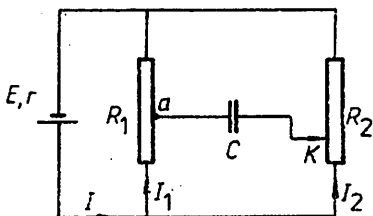


Fig. II.23.C

1. Să se determine intensitatea I a curentului principal și intensitățile I_1 și I_2 prin R_1 și respectiv R_2 .

2. Să se exprime sarcina electrică Q de pe armăturile condensatorului C în funcție de x .

3. Să se determine valorile lui x pentru care sarcina acumulată pe armături este egală cu jumătate din sarcina maximă.

4. Aplicație numerică : $E = 3,6$ V, $r = 0,2$ Ω , $R_1 = 2$ Ω , $R_2 = 8$ Ω , $C = 10$ μ F.

II.24. A. Un corp de masă $m = 2$ kg este acționat de forța $F = 10$ N un interval de timp $\Delta t_1 = 4$ s pe un plan orizontal și apoi un interval de timp $\Delta t_2 = 3$ s pe un plan înclinat de unghi α ($\sin \alpha = 0,2$). Direcția forței F formează în tot timpul mișcării unghiul $\beta = 30^\circ$ cu direcția deplasării, iar coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața pe care se deplasează este $\mu = 0,2$. Să se determine :

1. Distanța parcursă de corp în intervalul de timp $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 7$ s.

2. Vitezele corpului după 4 s și respectiv 7 s de la începutul mișcării.

3. Distanța parcursă de corp pe planul înclinat dacă după cele 3 s de acțiune a forței corpul este lăsat liber (acțiunea forței F încetează).

4. Forța F care ar produce deplasarea uniformă a corpului pe planul orizontal și apoi pe planul înclinat ($g = 10$ m/s²).

B. Într-un cilindru închis la ambele capete și vidat este suspendat printr-un resort elastic un piston de masă neglijabilă care se poate mișca în cilindru fără frecare. Pistonul este în poziție de echilibru când se găsește la baza cilindrului. În spațiul de sub piston se introduce o cantitate de gaz ideal ridicându-l până la înălțimea $h = 20$ cm, ca în figura II.24.B Să se determine :

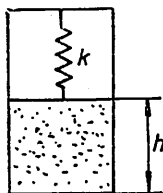


Fig. II.24.B

1. Înălțimea h_1 la care se stabilește pistonul când energia cinetică medie de translație a moleculelor crește de $n = 4$ ori față de cea inițială.

2. De câte ori este mai mare energia transmisă de gaz resortului când pistonul se găsește la înălțimea h_1 față de energia transmisă când pistonul se găsea la înălțimea h .

3. Se fixează pistonul la jumătatea vasului și se presupune existența unui orificiu în acesta astfel încât gazul umple întreg cilindrul la temperatura T (se neglijează volumul ocupat de resort). Să se determine de câte ori variază presiunea în acest sistem, dacă gazul dintr-o parte a cilindrului se menține la temperatura inițială T , iar gazul din cealaltă parte se încălzește și se menține la o temperatură $T' = 3 T$.

4. Este posibil ca presiunea în sistem să crească de două ori sau mai mult?

C. O sursă de curent continuu, având tensiunea electromotoare $E = 24$ V și rezistența internă $r = 2 \Omega$, alimentează un circuit format din rezistențele $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$ grupate mai întâi în serie și apoi în paralel. Pentru măsurarea intensităților curenților în cele două situații se folosește un miliampermetru cu scala de 40 diviziuni și care măsoară 5 mA pentru o diviziune, având rezistența interioară de $0,1 \Omega$. Să se determine :

1. Intensitățile curenților prin rezistențele R_1 , R_2 , R_3 și prin sursă în cele două cazuri.

2. Valoarea rezistenței șuntului pentru ca ampermetrul să măsoare, fără a se deteriora, intensitățile curenților în ambele cazuri.

3. Tensiunea la bornele sursei în cele două cazuri.

4. Presupunând că ampermetrul este folosit ca voltmetru, pentru a se măsura tensiunile la bornele sursei în ambele cazuri, ce valoare trebuie să aibă rezistența adițională pentru ca aparatul să corespundă.

II.25. A. O bilă de oțel cu masa $m = 0,05$ kg, suspendată de un fir cu lungimea $l = 0,8$ m, a fost deviată până când firul de suspensie a devenit orizontal, energia potențială a bilei fiind $0,4$ J. Bila este lăsată liber și la revenire, când firul formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ cu verticala, ea lovește perfect elastic un perete vertical. Să se determine :

1. Energia cinetică și energia potențială în momentul ciocnirii.

2. Tensiunea în fir în momentul ciocnirii.

3. La ce înălțime față de punctul de ciocnire se va ridica bila.

Se va considera $g = 10$ m/s².

B. Un kilomol de hidrogen molecular parcurge procesul reversibil ciclic reprezentat în figura II.25.B. Știind că pentru efectuarea proceselor $1 \rightarrow 2$ și $2 \rightarrow 3$ gazul primește în total căldura $Q_1 = 7896$ kJ, precum și faptul că transformarea $3 \rightarrow 1$ se produce după ecuația $T = \alpha p^2$ ($\alpha = \text{const.}$), se cere :

1. Să se reprezinte procesul ciclic reversibil în diagrama (p , V) și să se determine căldura molară la volum constant a gazului.

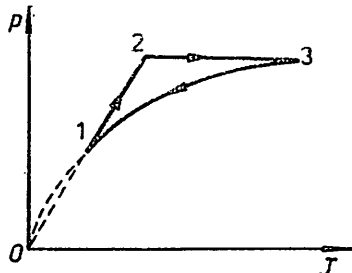


Fig. II.25.B

2. Să se calculeze căldura molară corespunzând procesului $1 \rightarrow 3$.
 3. Să se determine randamentul unui motor termic funcționând după acest ciclu :

Se dau : $T_1 = 100 \text{ K}$, $p_2 = 2 p_1$ și $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$.

C. O placă metalică P cu aria $S = 1,00 \text{ dm}^2$ este suspendată cu ajutorul unui resort elastic izolat de constantă $k = 4,43 \text{ N/m}$, la distanța $d_0 = 1,1 \text{ mm}$ de o altă placă P' , identică cu prima. Condensatorul cu aer C_1 , astfel format, este înseriat cu un condensator fix având capacitatea $C_0 = 100 \text{ nF}$ (fig. II.25.C). Știind că în cazul închiderii întrerupătorului K , din figură, placa mobilă este atrasă de cea fixă, situându-se la echilibru la distanța $d = 1,00 \text{ mm}$ de aceasta, să se determine :

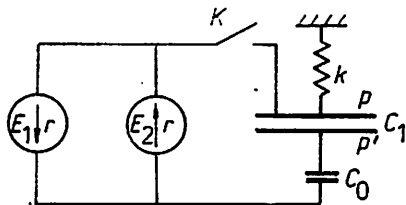


Fig. II.25.C

1. Tensiunea aplicată la bornele condensatorului C_1 .

2. Tensiunea la bornele condensatorului C_0 .

3. Diferența tensiunilor electromotoare $E_1 - E_2$.

4. Permitivitatea relativă a unei folii dielectrice cu grosimea $g = 0,50 \text{ mm}$ și aria $S = 1,00 \text{ dm}^2$, știind că — dacă această folie este introdusă între armăturile condensatorului C_1 — tensiunea la bornele condensatorului C_0 devine $U'_0 = 133 \text{ mV}$.

Se va lua permitivitatea aerului $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Rezistențele interne ale generatoarelor sînt egale. Firele de legătură nu împiedică mișcarea armăturii mobile P .

II.26. A.1. Două resorturi de aceeași lungime în stare nedeformată, dar avînd constante elastice diferite k_1 și k_2 , sînt legate de un corp de masă m aflat pe o suprafață orizontală pe care se poate deplasa fără frecare. Să se calculeze constanta elastică efectivă în fiecare din cele trei cazuri reprezentate în figura II.26.A.

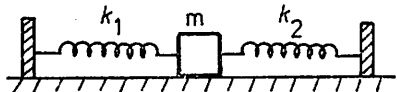
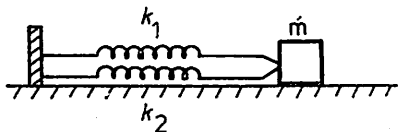


Fig. II.26.A

2. Un corp de masă m , suspendat de un resort avînd constanta elastică k , oscilează cu frecvența ν_1 . Dacă tăiem resortul în două părți egale și suspendăm același corp de una dintre jumătăți, frecvența este ν_2 . Care este raportul ν_2/ν_1 ?

B. Un amestec de gaz biatomic (2) și gaz monoatomic (1), cu raportul maselor $m_2/m_1 = 2$ și al maselor molare $\mu_2/\mu_1 = 2$, este încălzit izobar la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$, de la un volum inițial $V_1 = 1 \text{ l}$ pînă la o temperatură absolută

finală dublă : $T_2/T_1 = 2$. Să se afle căldura absorbită de amestec $\left(C_{1V} = \frac{3R}{2}, C_{2V} = \frac{5R}{2} \right)$.

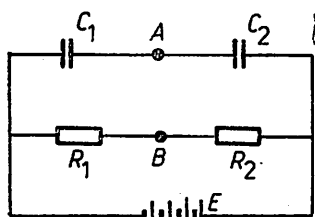


Fig. II.26.C

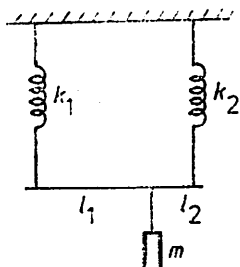


Fig. II.27.A

C. Să se calculeze diferența de potențial între punctele A și B din schema fig. II.26.C. Se cunosc : rezistențele R_1 , R_2 , capacitățile C_1 , C_2 , tensiunea electromotoare E (se neglijează rezistența internă a bateriei).

2. Se modifică această diferență de potențial dacă punctul A este legat la pământ?

II.27. A. Corpul de masă m din figura II.27.A este legat de o bară rigidă printr-un fir flexibil inextensibil, bara fiind legată de sistemul de resorturi k_1 , k_2 . Știind că sistemul oscilează cu perioada T , bara de legătură dintre resorturi are masa neglijabilă și rămâne orizontală și că raportul distanțelor l_1 și l_2 este $l_1/l_2 = e$, să se afle :

1. Amplitudinea maximă cu care poate oscila sistemul astfel ca firul să rămână întins.

2. Îndepărtind bara de legătură dintre cele două resorturi, se atîrnă o masă $m_1 = 2m$

de resortul 1 și $m_2 = 3m$ de resortul 2. Să se afle perioadele de oscilație ale celor două pendule formate.

B. Un mol de gaz ideal aflat inițial la temperatura T_1 și presiunea p_1 se destinde după legea $T = aV - bV^2$. Să se determine :

1. Variația energiei interne a gazului, atunci cînd volumul său crește de $n = 2$ ori.

2. Relația dintre constantele a și b pentru ca energia internă în starea finală a gazului să fie egală cu energia internă în starea inițială.

3. Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii de la punctul 1.

Se cunosc : exponentul adiabatic γ al gazului și constanta universală R a gazelor ideale.

C. O spiră circulară cu raza $r = 10$ cm și rezistența electrică $R = 10$ m Ω se rotește uniform cu turația $n = 6000$ rot/min într-un cîmp magnetic uniform de inducție B , perpendicular pe diametrul în jurul căruia are loc rotația. Știind că inductanța spirei este egală cu cea a unui solenoid fără miez magnetic de lungime $l = 20$ cm, avînd aria secțiunii transversale $S = 12,7$ mm² și $N = 50$ spire, iar inducția magnetică B este egală cu cea atinsă în solenoid în cazul în care acesta este parcurs de un curent electric continuu de intensitate $I = 1$ A, să se determine :

1. Inductanța spirei.

2. Inducția magnetică B .

3. Amplitudinea E_m a tensiunii electromotoare induse în spiră.

4. Defazajul dintre tensiunea electromotoare indusă și intensitatea curentului electric produs în spiră.

Permeabilitatea aerului $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

II.28. A. Se dă drumul unui corp să lungească pe un jgheab înclinat, continuat cu o buclă circulară verticală, de la înălțimea minimă de la care corpul nu părăsește suprafața buclei. Din buclă se taie un segment simetric față de verticala OC , corespunzător unui unghi la centru 2α ($\alpha < 90^\circ$), astfel încît, părăsind jgheabul în A, corpul să revină în B și să-și continue

mişcarea pe jgheab (ca și cum jgheabul ar fi întreg) (fig. II.28.A). Să se determine valoarea unghiului α . (Se neglijează frecările).

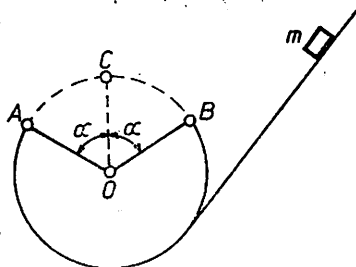


Fig. II.28.A

B. O masă $m = 20 \text{ g}$ de He închis într-un cilindru cu piston trece foarte lent din starea inițială cu $V_1 = 30 \text{ l}$, $p_1 = 500 \text{ kPa}$, în starea cu $V_2 = 10 \text{ l}$ și $p_2 = 2,5 \text{ MPa}$, conform graficului din figura II.28.B. Ce temperatură maximă va atinge gazul în cursul acestui proces? Se dau $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, $\mu = 4 \text{ g/mol}$.

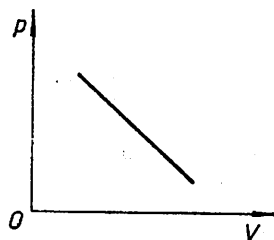


Fig. II.28.B

C. Un circuit serie R, L, C cu $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 0,40 \text{ H}$ și $C = 0,20 \mu\text{F}$ este alimentat de la un generator de tensiune alternativă a cărei frecvență poate fi variată. Se observă că pentru două frecvențe diferite f_1 și f_2 ale tensiunii de alimentare puterea activă este egală cu puterea reactivă. Să se calculeze:

1. Defazajul dintre curent și tensiune în cele două cazuri.
2. Frecvențele f_1 și f_2 .
3. Să se interpreteze rezultatele obținute.

II.29. A. O undă longitudinală se propagă pe direcția Ox într-un mediu elastic de densitate $\rho = 2,6 \text{ t/m}^3$, după legea

$$u_1 = 1,2 \sin (1000 \pi t - 2\pi x/\lambda) \text{ cm.}$$

Diferența de fază între două puncte aflate pe axa Ox la distanța $\Delta x = 3,2 \text{ m}$ este $\Delta\varphi = 4\pi/5$. Se cere să se calculeze:

1. Dependența de timp a energiei cinetice, a energiei potențiale și a energiei totale a unui punct material de masă $m = 1 \text{ g}$, care oscilează după legea u_1 în punctul de abscisă $x = 0$.
2. Lungimea de undă, frecvența și viteza de propagare a undei longitudinale.
3. Modulul de elasticitate a mediului elastic în care se propagă unda u_1 .
4. Amplitudinea și defazajul oscilației rezultate prin compunerea în punctul A de abscisă $x = 1 \text{ m}$ a oscilației u_1 și a oscilației u_2 care în punctul A are forma $u_2 = 1,2 \sin (1000 \pi t + \pi/4) \text{ cm}$.

B. Un proces ciclic efectuat cu un gaz ideal se reprezintă grafic, în sistemul de coordonate (p, V) , unde p și V sînt parametrii gazului printr-un cerc. Să se arate:

1. Pe care porțiune a ciclului se încălzește și pe care porțiune se răcește gazul.
2. Pe care porțiune a ciclului gazul primește și pe care porțiune cedează căldură.
3. Pe care porțiune a ciclului efectuează lucrul mecanic și pe care porțiune se efectuează lucrul mecanic asupra gazului. (Pe ce porțiuni ale ciclului căldura specifică este negativă).

C. Cursorul unui reostat montat ca divizor de tensiune delimitează o porțiune cu rezistența R_1 și o alta cu rezistența R_2 . O bobină cilindrică (lungimea l , uniform bobinată cu N spire), avînd o rezistență electrică R_b , este legată cu un capăt de cursor, iar cu celălalt capăt, printr-un rezistor R , la capătul porțiunii R_2 , și printr-un întrerupător K la capătul

porțiunii R_1 (fig. II.29.C). Bornele extreme ale divizorului de tensiune sînt legate la bornele unei surse de tensiune constantă, avînd tensiunea electromotoare E . Să se calculeze :

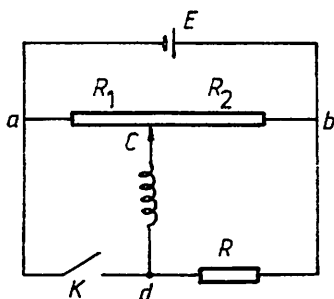


Fig. II.29.C

1. Valoarea rezistenței R , astfel încît la închiderea întrerupătorului K , deși își schimbă sensul, cîmpul magnetic din interiorul bobinei să nu-și schimbe intensitatea.

2. Inducția magnetică B a cîmpului în interiorul bobinei în condițiile de la punctul 1.

Aplicație numerică : $R_1 = 60 \, \Omega$, $R_2 = 140 \, \Omega$, $l = 16 \, \text{cm}$, $N = 800$, $R_b = 90 \, \Omega$, $E = 120 \, \text{V}$, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \text{N/A}^2$.

II.30. A. Pe un plan înclinat, cufundat pînă la jumătate din înălțimea sa în ulei, coboară un corp cu densitatea relativă față de ulei $d = 1,2$. Unghiul de înclinare al planului este $\alpha = 45^\circ$, înălțimea planului $H = 10 \, \text{m}$, coeficientul de frecare pe planul înclinat în aer $\mu = 0,19$, iar în ulei este neglijabil. Se neglijează fenomenele care intervin la contactul corpului cu suprafața uleiului. Să se calculeze :

1. Viteza corpului la intrarea în ulei.
2. Accelerația la mișcarea corpului în ulei.
3. Viteza corpului la baza planului înclinat.
4. Durata totală a mișcării. (Se consideră $g = 10 \, \text{m/s}^2$).

B. Prin încălzirea apei dintr-un vas avînd temperatura inițială $t_0 = 0^\circ\text{C}$, se obține într-o oră o cantitate $m_1 = 100 \, \text{kg}$ de vapor, avînd temperatura $\theta = 100^\circ\text{C}$. Știind că randamentul instalației de încălzire este $\eta_1 = 60\%$, se cere :

1. Ce cantitate de căldură este necesară pentru funcționarea instalației timp de 2 ore.
2. Să se calculeze intensitatea curentului electric care trecînd prin rezistența electrică $R = 200 \, \Omega$ a unui cuptor cu randamentul $\eta_2 = 0,9$ produce într-o oră aceeași cantitate de vapor.
3. Ce masă de vapor de apă s-a condensat ca urmare a introducerii în atmosfera de vapor a unei bucăți de gheață avînd masa $m_2 = 1 \, \text{kg}$ și temperatura inițială $t_0 = 0^\circ\text{C}$, dacă temperatura finală de echilibru este $\theta = 100^\circ\text{C}$. Se cunosc : căldura specifică a apei $c_a = 4180 \, \text{J/kg} \cdot \text{K}$, căldura latentă de topire pentru gheață $\lambda_0 = 0,335 \cdot 10^4 \, \text{J/kg}$, căldura latentă de vaporizare a apei $\lambda_v = 2,257 \cdot 10^4 \, \text{J/kg}$.

C. Se consideră un circuit în care pe reostatul de rezistență R se leagă în paralel două baterii de acumuloare. Prima baterie este formată din $n_1 = 8$ elemente legate în serie, iar a doua baterie este formată din $n_2 = 5$ elemente, de asemenea, legate în serie. Elementele celor două baterii sînt identice, avînd fiecare tensiunea electromotoare $E = 2 \, \text{V}$ și rezistența internă $r = 0,2 \, \Omega$.

1. Să se calculeze curenții I_1 și I_2 prin cele două baterii și curentul I prin rezistența $R = 4 \, \Omega$.
2. Pentru ce valoare a rezistenței R , curentul I_2 se anulează?
3. Să se afle valoarea rezistenței R pentru care puterea disipată de aceasta este maximă și maximul acestei puteri.

II.31. A. O seringă aflată în poziție orizontală, plină cu apă, de lungime $l = 5 \, \text{cm}$, are suprafața pistonului $S_1 = 2 \, \text{cm}^2$, iar suprafața orificiului

de ieșire $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. În cât timp va fi scoasă apa din seringă, dacă asupra pistonului acționăm cu o forță constantă $F = 3,6 \text{ N}$?

B. Două incinte cu azot, avînd volumele $V_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ și $V_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, aflate la temperatura $T = 300 \text{ K}$, sînt puse în legătură printr-un tub subțire prevăzut cu un robinet. Inițial, în incinta 1 presiunea azotului este $p_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, iar în incinta 2 presiunea este $p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

1. Să se afle masa totală a gazului aflat în cele două incinte și masele de gaz din fiecare incintă, după deschiderea robinetului, temperatura rămînînd neschimbată.

2. Care este presiunea finală din fiecare incintă după închiderea robinetului, incinta 1 fiind încălzită la 400 K .

3. Să se calculeze viteza termică și concentrația moleculelor din incinta 2 după închiderea robinetului.

Se cunosc: masa molară a azotului $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$, constanta gazelor perfecte $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, numărul lui Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ molecule/kmol}$.

C. Un bec cu puterea $P = 60 \text{ W}$ și tensiunea nominală $U_1 = 110 \text{ V}$ este montat la o rețea de curent alternativ cu tensiunea mai mare decît tensiunea de lucru a becului. Pentru ca becul să funcționeze normal, se montează în serie cu el o bobină ideală. Știînd că factorul de putere al circuitului astfel format este $\cos \varphi = 0,5$ să se determine:

1. Tensiunea rețelei de curent alternativ.

2. Impedanța circuitului.

3. Reactanța circuitului.

4. Intensitatea curentului trebuie măsurată cu un miliampermetru cu rezistența interioară $R_A = 0,9 \Omega$, care are 100 diviziuni și poate măsura 1 mA pe diviziune. Să se calculeze valoarea rezistenței șuntului ce trebuie montat pentru ca miliampermetrul să măsoare curenți pînă la 1 A .

II.32. A. Fie sistemul, din figura II.32.A, format din bilele 1, 2, 3 și 4, 5 fixate la capetele unui fir inextensibil trecut peste un scripete ce se poate roti fără frecare. Bilele, considerate puncte materiale de aceeași masă, se află inițial toate la înălțimea $h = 13 \text{ m}$ față de sol. Se lasă sistemul să se miște liber. După 2 s se desprinde bila 1, iar după încă 1 s se desprinde bila 2. Să se determine:

1. Timpul după care bila 1 va atinge solul.

2. Timpul după care bila 2 va atinge solul.

3. Timpul după care bila 3 se va afla la același nivel cu bilele 4 și 5.

Se va lua $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B. Două vase identice ce conțin aer la temperatura $T = 300 \text{ K}$ sînt legate printr-un tub orizontal cu diametrul $d = 0,4 \text{ cm}$, la jumătatea căruia se află o picătură de mercur care împarte sistemul în două volume egale, fiecare avînd 314 cm^3 . Considerînd aerul un gaz ideal, să se determine:

1. Viteza termică a moleculelor de aer, dacă masa molară a aerului este $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$, iar $R = 8310 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$.

2. Cu cît se va deplasa picătura de mercur dacă unul din vase se încălzește cu 3°C , iar celălalt se răcește cu 3°C .

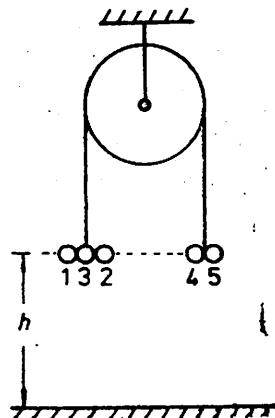


Fig. II 32.A

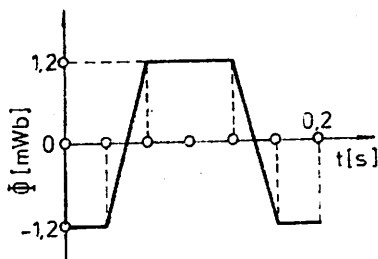


Fig. II.32.C

3. Variația energiei interne a întregului sistem.

C. Fluxul magnetic Φ care străbate o spirală se modifică în timp după diagrama din figura II.32.C.

Să se reprezinte grafic variația în timp a tensiunii induse în spirală și să se determine valorile extreme ale acesteia.

II.33. A. Două corpuri de mase $m_1 = m_2 = 1$ kg, aflate la aceeași înălțime $h = 5$ m față de pământ și la distanța $d = 8$ m unul de altul, sînt lansate în același moment unul spre celălalt cu viteze orizontale egale $v_{01} = v_{02} = 10$ m/s. Să se calculeze :

1. După cît timp de la lansare și la ce înălțime se ciocnesc corpurile.
 2. Viteza corpului format considerînd ciocnirea plastică.
 3. Variația temperaturii corpurilor în procesul de ciocnire.
- Se cunosc : căldura specifică a materialului corpurilor $c = 10^3$ J/kg·K, $g = 10$ m/s².

B. O cantitate $\nu = 12$ moli de gaz ideal, aflat în starea 1, caracterizată de presiunea $p_1 = 10^5$ N/m², volumul $V_1 = 0,5$ m³ și temperatura T_1 , este comprimată izobar pînă la starea 2 și apoi comprimată adiabatic pînă la starea 3 în care $T_3 = T_1$ și $V_3 = V_1/8$. Să se calculeze :

1. Lucrul mecanic efectuat în transformarea 1—2.
 2. Randamentul unei mașini termice care ar funcționa după ciclul 1—2—3—1, dacă transformarea 3 → 1 se face la temperatură constantă.
 3. Variația energiei interne în transformările 1—2—3.
 4. Viteza termică a moleculelor gazului în starea 2.
- Se cunosc $C_V = 5R/2$, $\mu = 25$ kg/kmol, $\ln 2 = 0,693$, $\gamma = 1,5$.

C. Se dă circuitul din figura II.33.C. Cînd circuitul este alimentat la tensiunea efectivă $U = 220$ V, $\nu = 50$ Hz, reactanța bobinei este $X_L = 30 \Omega$. Se cer :

1. Valorile lui R și C pentru care, atunci cînd se închide contactul K pe poziția 1, intensitatea curentului debitat de sursă este de două ori mai mare decît în cazul cînd K este deschis, iar pentru K în poziția 2, intensitatea curentului debitat de sursă este $\alpha = 4/9$ din intensitatea curentului pentru K deschis.
2. Intensitatea curentului prin R , factorul de putere și valorile instantanee pentru i_R , i_L și i_C .
3. Frecvența de rezonanță a circuitului cu K în poziția 2.

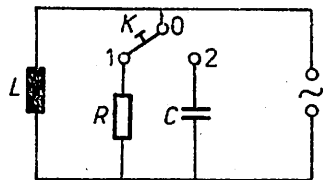


Fig. II.33.C

II.34. A. Două corpuri C_1 și C_2 de mase egale, legate între ele printr-un cablu de lungime $2l$, se află în vîrfurile a două plane înclinate P_1 și P_2 de unghiuri α și β , aflate unul în continuarea celuilalt (fig. II.34.A). Lungimea planului P_1 este l și a planului P_2 este $4l$. Se dau : $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$, $\sin \beta = 2\sqrt{5}/5$, $l = 4\sqrt{5}$ m, $g = 10$ m/s², $m_1 = m_2 = 1$ kg. Se cere :

1. După cît timp de la pornirea simultană a celor două corpuri sub acțiunea propriilor greutatea, fără frecare, cablul se întinde.
2. Care sînt distanțele parcurse de corpuri în acest timp ?

3. Care este viteza comună a sistemului format de cele două corpuri imediat după întinderea cablului?

4. După cât timp de la întinderea cablului, corpurile ajung la baza planului P_2 ?

B. Într-un tub capilar așezat orizontal se află o coloană de lichid care udă pereții. Raza tubului este $R = 1$ mm, iar tensiunea superficială a lichidului este $\sigma = 75$ mN/m. Cu ce presiune minimă trebuie să se sufle în tub pentru a evacua coloana de lichid din tubul capilar?

C. Un sistem izolat este format din două bile sferice conductoare având razele $r_1 = 2$ mm, $r_2 = 3$ mm, masele $m_1 = 0,4$ g, $m_2 = 0,8$ g și sarcinile electrice $q_1 = 100$ nC, $q_2 = -25$ nC. Inițial bilele se află în repaus, distanța dintre centrele lor fiind $r_0 = 90$ mm. Se lasă bilele libere. Să se calculeze:

1. Energia potențială de interacțiune electrică a bilelor în starea inițială și în starea imediat înainte de ciocnire.

2. Energia cinetică totală a bilelor imediat înainte și imediat după ciocnire, presupunând că ciocnirea este perfect elastică.

3. Sarcinile bilelor după ciocnire, presupunând că timpul de contact este suficient pentru egalizarea potențialelor.

4. Vitezele bilelor după ciocnire în momentul când distanța dintre centrele lor devine iarăși r_0 .

5. Să se reprezinte grafic energia potențială de interacțiune electrică, precum și energia cinetică totală a bilelor, înainte și după ciocnire, în funcție de distanța dintre bile.

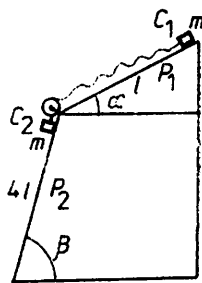


Fig. II.34.A

II.35. A. De tavanul unui ascensor este suspendat un pendul cu lungimea $l = 40$ cm, pendulul aflându-se în mișcare de oscilație. Ascensorul pornește în sus din repaus, deplasându-se cu accelerația $a_1 = 1,25$ m/s² un timp $t_1 = 4$ s pe distanța AB , după care își continuă mișcarea uniformă pe distanța BC și în final pentru a se opri în punctul D aflat la înălțimea $AD = h = 120$ m, frinează cu accelerația $a_3 = -1,25$ m/s². Se cere să se calculeze:

1. Timpul în care ascensorul parcurge distanțele BC și CD .

2. Tensiunea în cablu, dacă masa ascensorului este $M = 800$ kg.

3. Frecvențele de oscilație ale pendulului pe cele trei porțiuni ale mișcării.

4. Numărul de oscilații complete efectuate de pendul în cursul mișcării ($g = 10$ m/s²).

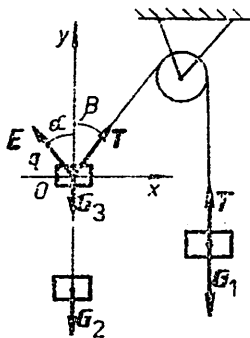


Fig. II.35.B

B. Trei corpuri de mase $m_1 = 1$ kg, $m_2 + m_3 = 0,9$ kg sînt legate printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix. Corpul m_3 are o sarcină electrică $q = +4 \cdot 10^{-6}$ C și se află într-un câmp electric de intensitate $E = 2 \cdot 10^6$ V/m și a cărui direcție face unghiul α cu verticala (fig. II.35.B). Masa firului și forțele de frecare se neglijează; se ia $g = 10$ m/s².

1. Considerînd sistemul în echilibru, să se determine unghiurile α și β definite conform figurii II.35.B.

2. Ce se întâmplă dacă cîmpul electric este pe direcție verticală cu sensul în : (a) sus ; (b) jos.

C. În fiecare din incintele cilindrice 1 și 2 (fig. II.35.C) se găsește un mol de oxigen în condiții normale. Fiecare incintă are unul din capete închis cu un piston. În cele două incinte sînt plasate rezistențele electrice r_1 și r_2 legate în serie. Cantitățile de căldură degajate de cele două rezistențe la trecerea unui curent electric sînt preluate în întregime de cele două mase de gaz a căror temperatură variază cu $\Delta T = 10$ K. Gazul din incinta 1 suferă o transformare izobară, în timp ce gazul din incinta 2 suferă o transformare izocoră. Conform figurii, pe rezistențele r_1 și r_2 se aplică o tensiune variabilă cu ajutorul unui montaj potențiometric. Valoarea porțiunii a din r_3 , conectată în paralel cu r_1 și r_2 , se alege astfel încît rezistența totală a circuitului format din r_1 , r_2 și a să fie $R = 5$ Ω .

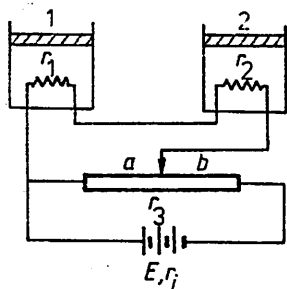


Fig. II.35.C

Se dau : căldura specifică izobară a gazului $c_p = 910$ J/kg $\cdot$ K, constanta universală a gazelor $R = 8,31$ J/mol $\cdot$ K, 1 atm = 101,325 kPa, masa moleculară a oxigenului $\mu = 32$, rezistențele $r_1 + r_2 = r = 10$ Ω , rezistența $r_3 = 14$ Ω , t.e.m. a sursei $E = 10$ V, rezistența internă a sursei $r_i = 1$ Ω . Se neglijează masa pistoanelor și variația cu temperatura a rezistențelor r_1 și r_2 . Să se calculeze :

1. Căldura specifică izocoră a gazului c_v .
2. Presiunea finală a gazului în transformarea izocoră.
3. Valorile rezistențelor r_1 și r_2 .
4. Intensitățile curentului electric prin r_1 și r_2 , precum și prin porțiunile a și b ale rezistenței r_3 .
5. Timpul cît circuitul este închis pentru ca temperatura gazului să se ridice cu $\Delta T = 10$ K.

II.36. A. Un corp de masă $m_1 = 0,8$ kg, așezat pe un plan înclinat, este legat la o extremitate a unui fir trecut peste un scripete, la cealaltă extremitate fiind atârnat un corp de masă $m_2 = 0,4$ kg. Se consideră firul ca fiind inextensibil și de masă neglijabilă. Se cere :

1. Unghiul α_1 al planului pentru care corpurile sînt în echilibru, dacă frecarea pe planul înclinat este neglijabilă.
2. Unghiul α_2 al planului pentru care primul corp urcă uniform pe plan cu frecare ($\mu = 0,2$).
3. Unghiul planului α_3 pentru care primul corp coboară uniform cu frecare pe plan ($\mu = 0,2$).
4. Unghiul α_4 pentru care corpul urcă pe plan uniform accelerat cu accelerația $a = 1$ m/s², cu frecare ($\mu = 0,2$).
5. Este posibil să avem o mișcare accelerată a corpului de masă m_1 în coborîre pe plan cu accelerația $a' = 0,5$ m/s²?
6. Care este tensiunea în fir în cazul 4 al problemei? Pentru ce unghi α tensiunea din fir este maximă și care este această valoare maximă a tensiunii?

B. O bucată de gheață aflată la temperatura $t = -5^\circ\text{C}$ este încălzită pînă se topește o parte din ea. Știind că încălzirea se face la presiune normală, să se calculeze :

1. Frațiunea din masa de gheață topită pentru ca lucrul mecanic efectuat în cursul încălzirii să fie nul.

2. Căldura absorbită de unitatea de masă de gheață în cursul încălzirii.

Se cunosc : coeficientul de dilatare în volum al gheții $\gamma = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, variația volumului unității de masă de gheață prin topire $v = -10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$, căldura specifică a gheții $c_g = 2100 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, căldura latentă de topire a gheții $\lambda_g = 334 \text{ kJ/kg}$.

C.1. De pe fundul unui lac ies bule de gaze cu diametrul $d_0 = 1 \text{ mm}$. Cînd ajung la suprafața apei, diametrul bulelor de gaze devine $d_1 = 1,1 d_0$. Să se calculeze adîncimea lacului știind că tensiunea superficială a apei este $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$, iar presiunea atmosferică $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$. Temperatura rămîne neschimbată.

2. Într-un corp de pompă se află o bulă de săpun cu diametrul $d_1 = 3 \text{ cm}$. Temperatura și presiunea inițială în corpul de pompă sînt $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $p_0 = 40 \text{ N/m}^2$. Efectuînd o transformare izobară, gazul din cilindru se răcește pînă la $t_2 = 7^\circ\text{C}$, cînd diametrul bulei devine $d_2 = 0,96 d_1$. Cunoscînd tensiunea superficială a apei cu săpun la t_1 , $\sigma_1 = 0,04 \text{ N/m}$, să se calculeze valoarea ei σ_2 la temperatura t_2 .

II.37. A. O scîndură AB cu lungimea $l = 1 \text{ m}$ și greutate neglijabilă este susținută prin două resorturi de un tavan (fig. II.37.A). În stare liberă cele două resorturi au lungimi egale, iar constantele elastice sînt $k_1 = 980 \text{ N/m}$ și $k_2 = 1470 \text{ N/m}$. Așezînd pe scîndură o greutate $G = 980 \text{ N}$, scîndura se înclină cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală, iar greutatea rămîne fixă pe scîndură. Să se calculeze :

1. Distanța x față de capătul A la care se așează greutatea G pe scîndură și tensiunile T_1 și T_2 în cele două resorturi.

2. Valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre scîndură și corp.

3. La ce distanță y față de capătul A trebuie pus corpul pe scîndură pentru ca aceasta să stea în poziție orizontală și care sînt tensiunile T și T'_2 în acest caz.

4. Cum variază unghiul α cu poziția x ?

B. O presă hidraulică este acționată de un motor. Cunoscînd randamentul presei $\eta = 80\%$, raportul diametrelor pistoanelor $d_1/d_2 = 1/10$, greutatea ce trebuie ridicată $G = F_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N}$ și că pistonul mic coboară la fiecare apăsare cu $h_1 = 30 \text{ cm}$, făcîndu-se $n = 100$ apăsări în timpul $t = 80 \text{ s}$, se cere :

1. Puterea consumată de motor.

2. Distanța H pe care se deplasează pistonul mare.

3. Forța F_1 ce acționează asupra pistonului mic.

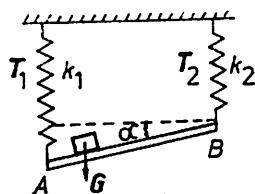


Fig. II.37.A

C. Un circuit electric format dintr-un rezistor cu rezistența $R_1 = 3\Omega$ este conectat în serie cu o baie pentru electroliză ce conține o soluție de sulfat de cupru. Circuitul este alimentat de la o sursă de curent continuu cu t.e.m. $E = 20\text{ V}$ și rezistența interioară $r = 1\Omega$, formată din $n = 10$ elemente galvanice identice conectate în serie. Intensitatea curentului prin circuit este $I = 4\text{ A}$. Să se afle :

1. T.e.m. E_1 și rezistența interioară r_1 a unui element galvanic.
2. Rezistența R_2 a băii pentru electroliză.
3. Masa de cupru depusă la catod în timpul $t = 5\text{ h}$ (echivalentul electrochimic al cuprului $K = 0,32\text{ mg/C}$).
4. Timpul în care rezistorul R_1 introdus într-un calorimetru ce conține $m_1 = 400\text{ g}$ apă la temperatura $\theta_1 = 40^\circ\text{C}$ și $m_2 = 600\text{ g}$ gheață la temperatura $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$, aduce conținutul calorimetrului la temperatura $\theta = 30^\circ\text{C}$. Se va neglija căldura absorbită de calorimetru. Se va presupune că nu există pierderi de căldură. Se dau : căldura specifică a apei $c = 4180\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, căldura latentă de topire a gheții $\lambda_g = 334\text{ kJ/kg}$.
5. Rezistența șuntului cu care trebuie prevăzut un ampermetru a cărui rezistență este $R_A = 3,8\Omega$ și care poate măsura un curent maxim $I_A = 200\text{ mA}$, pentru a măsura o intensitate maximă egală cu intensitatea curentului din circuitul dat.

II.38. A. O scindură orizontală AB cu lungimea $l = 4\text{ m}$ și greutatea $G = 100\text{ N}$ este articulată în A și legată cu ajutorul cablului DE care face un unghi $\alpha = 45^\circ$ cu orizontala (fig. II.38.A). Punctul D se află la distanța de 1 m de capătul B . Pentru a menține scindura în poziție orizontală, în punctul B acționează o forță $F = 200\text{ N}$ a cărei direcție face un unghi $\beta = 60^\circ$ cu orizontala. Să se calculeze reacțiunea din articulația A și tensiunea din cablul DE .

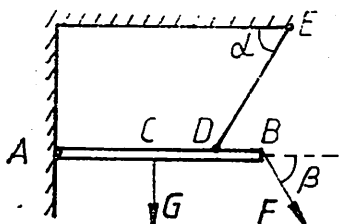


Fig. II.38.A

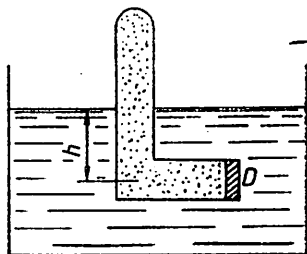


Fig. II.38.B

B. Un tub închis la un capăt și îndoit ca în figura II.38.B are volumul $V_1 = 1\text{ l}$. În tub se află aer, la presiunea atmosferică $p_0 = 10^5\text{ N/m}^2$, închis cu ajutorul unui piston de diametru $D = 40\text{ mm}$ ce se poate deplasa fără frecare.

1. La ce adâncime h trebuie cufundat tubul într-un vas cu apă pentru ca pistonul să se deplaseze pe distanța orizontală $l = 40\text{ mm}$ ($g = 10\text{ m/s}^2$).
2. Să se afle cantitatea de căldură ce trebuie transmisă aerului din tub pentru ca pistonul să revină la poziția inițială. Se cunosc : $c_{p(\text{aer})} = 1006\text{ J/kg}\cdot\text{K}$, $\mu_{\text{aer}} = 28,9\text{ kg/kmol}$ și $R = 8,31\text{ kJ/kmol}\cdot\text{K}$.
3. Să se afle lucrul mecanic efectuat de aer în transformarea de la punctul 2.

4. Prin ce transformare simplă aerul poate fi adus din ultima stare în starea inițială?

5. Să se reprezinte grafic cele trei transformări ale aerului din tub folosind coordonatele (p, V) ; (p, T) ; (V, T) .

C. Se dă montajul din figura II.38.C. Se cere :

1. Care este intensitatea curentului în circuitul principal și prin cele două ramuri când comutatorul K este deschis?

2. Care este intensitatea în circuitul principal când comutatorul K este închis?

3. Păstrând R_1, R_2, R_3 constante și K deschis, cit trebuie să fie rezistența R_4 pentru ca puterea debitată de sursă pe porțiunea CD a montajului să fie maximă?

4. Ce relație trebuie să existe între rezistențele R_1, R_2, R_3 și R_4 pentru ca galvanometrul montat între punctele A și B să nu indice trecerea unui curent electric?

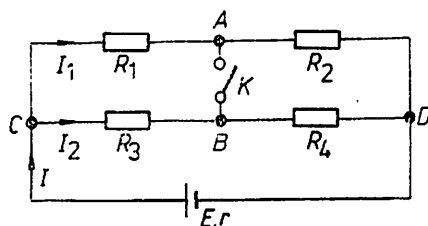


Fig. II. 38.C

II.39. A. Un corp cu masa $m = 0,01$ kg, legat de un resort elastic orizontal, oscilează fără frecare pe o masă orizontală conform ecuației: $y = 0,2 (\sqrt{3} \cos 2t + \sin 2t)$ m. Să se determine :

1. Pulsăția, perioada și frecvența oscilației.

2. Momentele în care elongația este egală cu jumătate din amplitudinea oscilației, precum și faza oscilației la momentul $t = 0$.

3. Energia potențială elastică maximă pe care o poate atinge corpul în cazul în care — pornind din poziția dată de ecuația oscilației armonice pentru $t = 0$, cu viteza corespunzătoare aceluiași moment — s-ar deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,1$. Se va lua $g = 10$ m/s²

B. O mașină termică, utilizând drept agent 5 moli de gaz perfect, funcționează după ciclul format din izocora AB , izobara BC , izocora CD și izobara DA . Știind că $p_A = 10^5$ N/m², $V_A = 0,1$ m³, $p_B = 2p_A$ și $V_C = 4V_A$, să se determine :

1. Temperaturile la care se află gazul în stările A, B, C și D .

2. Lucrul mecanic efectuat de mașina termică într-un ciclu.

3. Randamentul mașinii termice.

Se dau : $C_V = 3R/2$, $R = 8310$ J/kmol · K.

C. O bobină realizată din fir de nichelină cu diametrul de 0,5 mm și rezistivitatea $\rho = 4,5 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ este înfășurată pe un miez magnetic cilindric cu permeabilitatea $\mu = 4\pi \cdot 10^{-5}$ N/A² și diametrul $D = 1$ cm. Știind că înfășurarea bobinei are 500 spire pe o lungime de 4 cm și că este alimentată cu tensiunea $u(t) = 204,4 \sin 100 \pi t$ V, să se calculeze :

1. Inductanța bobinei.

2. Intensitatea efectivă a curentului electric prin bobină.

3. Puterile activă, reactivă și aparentă.

D. Subiecte teoretice :

1. Să se deducă : (a) expresiile vitezei liniare și accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă ; (b) variația cu temperatura și presiune

nea a densității unui gaz perfect ; (c) perioada de rotație a unei particule încărcate electric într-un câmp magnetic uniform.

2. Să se scrie, indicind semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin : (a) legea lui Hooke ; (b) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor ; definiția și expresia factorului de supratensiune (calitate) în curent alternativ monofazat pentru circuitul $R\bar{L}C$ serie.

(Concursul de admitere la facultățile cu profil electric și mecanic, iulie 1986 (I))

II.40. A. De un corp de masă $m = 2$ kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, este legat un resort elastic de constantă $k = 40$ N/m. Asupra capătului liber al resortului se aplică o forță F cu sensul spre corp (fig. II.40.A). Pentru a scoate corpul din repaus este necesar ca resortul să fie comprimat cu cel puțin $x_m = 5$ cm. Aplicând o forță constantă, astfel încît — pe întreaga durată a mișcării corpului pînă la racordul suprafeței plane cu o trambulină avînd raza de curbură $R = 84,12$ m — resortul să fie comprimat cu $x = 0,1$ m, se imprimă corpului o mișcare uniform accelerată pe distanța $D = 50$ m

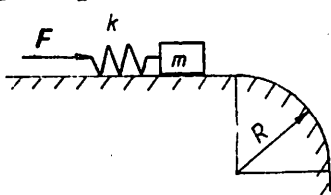


Fig. II.40.A

pînă la trambulină, cînd acțiunea forței F încetează. Să se determine :

1. Coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală.
2. Viteza corpului la intrarea pe trambulină.
3. Lungimea traseului parcurs de corp pe trambulină pînă la desprinderea sa. Se neglijează frecarea corpului cu trambulina. Se va lua $g = 9,8$ m/s².

B. Un mol de hidrogen aflat inițial în starea A caracterizată de parametrii $p_A = 4,155 \cdot 10^5$ N/m², $V_A = 2 \cdot 10^{-2}$ m³ ajunge, printr-o destindere izotermă, în starea B în care volumul gazului este $V_B = 4 \cdot 10^{-2}$ m³, după care, printr-o comprimare izobară $B \rightarrow C$, revine la volumul inițial ($V_C = V_A$). Să se determine :

1. Temperaturile și presiunile corespunzînd stărilor A , B și C .
2. Lucrul mecanic efectuat și căldura schimbată de gaz cu exteriorul în comprimarea izobară BC .
3. Randamentul motorului termic care funcționează după ciclul $ABCA$. Se dau : $C_p = 7R/2$, $R = 8310$ J/kmol $\cdot$ K, $\ln 2 = 0,693$.

C. Pe cadrul metalic orizontal $MPQS$ (fig. II.40.C) se deplasează cu viteza constantă $v = 2$ m/s conductorul NR , confecționat din aceleași

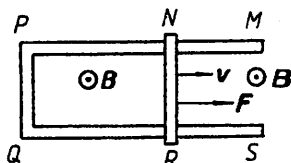


Fig. II.40.C

bare metalice de rezistivitate $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot$ m, densitate $d = 8900$ kg/m³ și secțiune $S = 1$ cm², ca și cadrul. Știind că $PQ = NR = 1$ m, să se determine :

1. Valoarea și sensul tensiunii electromotoare induse în conductor în prezența unui câmp magnetic uniform, a cărui inducție $B = 10$ mT are direcția verticală și sensul indicat în figura II.40.C.
2. Intensitatea curentului prin conductor atunci cînd $PN = QR = 1,5$ m.
3. Coeficientul de frecare dintre conductorul NR și cadru, știind că pentru a asigura deplasarea conductorului cu viteza indicată trebuie acțio-

nat asupra acestuia cu o forță exterioară, în sensul mișcării, a cărei valoare — atunci când $PN = QR = 1,5 \text{ m}$ — este $F = 1,4 \text{ N}$. Se va lua $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

D. Subiecte teoretice :

1. Să se deducă : (a) legea (ecuația) lui Bernoulli a dinamicii fluidelor ; (b) randamentul motorului termic care funcționează după un ciclu Carnot reversibil ; (c) expresiile impedanțelor circuitelor RLC serie, respectiv derivație, de curent alternativ.

2. Să se enunțe și să se scrie, indicând denumirile mărimilor care intervin : (a) legea lui Newton a atracției universale ; (b) legile transformărilor termodinamice elementare : izotermă, izobară, respectiv izocoră ; (c) legile lui Faraday ale electrolizei.

(Concursul de admitere la facultățile cu profil electric și mecanic, iulie 1986 (II)).

II. Subiecte de examen propuse 152-183

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 184-205

- II.1. A.1. $v_m = [x(t_1) - x(t_0)]/(t_1 - t_0) = 8 - 3(t_1 + t_0)$; 5 m/s; -4 m/s.
 2. $v = [x(t + \Delta t) - x(t)]/\Delta t = 8 - 6t - 3\Delta t \Rightarrow v = -10,3$ m/s; $v = -10,03$ m/s; $v = -10,003$ m/s; $v \rightarrow -10$ m/s.
 3. $v = 8 - 6t$.
 4. $a = [v(t + \Delta t) - v(t)]/\Delta t = -6$ m/s².

- B.1. $p_1 = p_0 l/(l + \Delta l) \simeq 0,7 \cdot 10^5$ N/m², $p_2 = p_0 l/(l - \Delta l) \simeq 1,7 \cdot 10^5$ N/m².
 2. $F = (p_2 - p_1)S = 200$ N.
 3. $p_2 S(l - \Delta l) = m_2 RT/\mu$, $p_1 S(l - \Delta l) = (m_2 - \Delta m) RT/\mu \Rightarrow \Delta m = \mu S(l - \Delta l)(p_2 - p_1)/RT = 1,39 \cdot 10^{-3}$ kg.

- C.1. $C_{1e} = C_1 C_2/(C_1 + C_2) = 150$ μ F; $Q_1 = Q_2 = Q = C_{1e} E = 0,15$ C;
 $U_1 = Q/C_1 = 750$ V, $U_2 = Q/C_2 = 250$ V.

2. Condensatorul C_1 rămîne cu sarcina $Q = 0,15$ C la tensiunea $U_1 = 750$ V. Sarcina $Q_2 = Q$ de pe condensatorul C_2 se redistribuie pe condensatoarele C_2 și C_3 legate în paralel: $U'_2 = U_3 = Q/(C_2 + C_3) = 107$ V; $Q'_2 = 0,064$ C, $Q_3 = 0,086$ C.

3. $C'_{1e} = [C_1(C_2 + C_3)]/(C_1 + C_2 + C_3) = 175$ μ F, $U_4 = Q/(C'_{1e} + C_4) \simeq 260,9$ V, $Q_4 = 0,1044$ C, $Q_1 = 0,0456$ C, $U_1 = 228$ V, $U_2 = U_3 = U_4 - U_1 = 32,9$ V, $Q_2 = 0,0197$ C, $Q_3 = 0,0263$ C.

- II.2. A.1. În ΔAOB (vezi fig. II.2.A de la pag. 152) se folosește teorema sinusurilor: $v_0 t/\sin \alpha = vt/\sin \beta$ cu $\sin \beta = b/l$; se obține $\sin \alpha \geq 1/2$, $\alpha \in [30^\circ, 150^\circ]$.

2. $v = v_0 b/l \sin \alpha$, v este minim pentru $\sin \alpha = 1$, $\alpha = 90^\circ$; $v_{\min} = 1,5$ m/s.

3. 403,2 m.

4. $t = 33,6$ s.

- B. $Q = n(m + \nu \mu) g(h - h') = (mc_{\text{ca}} + \nu C_V)(T - p_0 V/\nu R)$, cu $C_V = C_P - R = \mu c_p - R$; se obține $h = 329,5$ m.

- C.1. La echilibru $G - F_A - F_e = 0$, unde $G = mg$ este greutatea picăturii, $F_e = qU/d$ este forța electrică, iar $F_A = 4\pi r^3 \rho_0 g/3$ este forța arhimedică. La urcare $G - F_A + F_1 - F_{e1} = 0$, unde $F_1 = 6\pi \eta r v_1$ și $F_{e1} = qU_1/d$. La coborîre $G - F_A - F_2 + F_{e1} = 0$. Se obține $6\pi \eta r(v_2 - v_1) = 8\pi r^3 g(\rho - \rho_0)/3 \Rightarrow r = 0,49 \cdot 10^{-6}$ m.

2. $q = 16 \cdot 10^{-19}$ C.

3. $n = 10$.

- II.3. A. $a = g[M - \mu(m_1 + m_2)]/(M + m_1 + m_2) = 0,7$ m/s², $T_1 = M(g - a) = [Mg(1 + \mu) \cdot (m_1 + m_2)]/(M + m_1 + m_2) = 18,2$ N, $T_2 = m_2 g(1 + \mu)M/(M + m_1 + m_2) = 10,9$ N; $a' = g[M - \mu(m_1 + m_2)]/(m_1 + m_2) = 0,98$ m/s², $T'_1 = Mg = 19,6$ N, $T'_2 = Mm_2 g/(m_1 + m_2) = 11,76$ N.

B.1. $U_1 + U_2 = U'_1 + U'_2 \Rightarrow \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ cu $\Delta U_1 = \nu_1 C_{1v}(T - T_1)$ și $\Delta U_2 = \nu_2 C_{2v}(T - T_2)$, unde $\nu_i = p_i V / 2RT_i$, $i = 1, 2$. Se obține $T = 542$ K.

2. $\nu_1 = 12$ moli, $\nu_2 = 30$ moli; $p'_1 = \nu_1 RT/V = 0,9 \cdot 10^5$ N/m²; $p'_2 = \nu_2 RT/V = 2,25 \cdot 10^5$ N/m²; $p = p'_1 + p'_2 = 3,15 \cdot 10^5$ N/m².

3. Vasul fiind izolat adiabatic, transformarea este adiabatică: $TV^{\gamma-1} = T_3(V/2)^{\gamma-1} \Rightarrow T_3 = T \cdot 2^{\gamma-1}$ cu $\gamma - 1 = R/C_v$. Pentru determinarea lui C_v vom scrie $(\nu_1 + \nu_2)C_v \Delta T = \nu_1 C_{1v} \Delta T + \nu_2 C_{2v} \Delta T \Rightarrow C_v = (\nu_1 C_{1v} + \nu_2 C_{2v})/(\nu_1 + \nu_2)$. Se obține $\gamma - 1 = 0,45$ și $T_3 = 742,54$ K.

4. $\Delta U = (\nu_1 + \nu_2)C_v(T_3 - T) = 155$ kJ; $L = -\Delta U = -(\nu_1 + \nu_2)C_v(T - T_3) = -155$ kJ.

C. 1. $R_s = 16,7$ Ω .

2. $I_V = 0,01$ A, $U_{\max} = 1000$ V.

II.4. A.1. $a_A = 1$ m/s², $a_B = 2$ m/s², $x_{1A} = 50$ m, $x_{2A} = 450$ m, $x_{1B} = 100$ m, $x_{2B} = 500$ m.

2. $t = 35$ s, $S = 600$ m.

3. $a_{fA} = a_{fB} = 1$ m/s², $t_{0A} = 30$ s, $t_{0B} = 20$ s, $S_{A\max} = 450$ m, $S_{B\max} = 200$ m.

4. $t \in [0, 10]$, $\Delta S = t^2/2$; $t \in (10, 30]$, $\Delta S = 20t - t^2/2 - 100$; $t \in (30, 35]$, $\Delta S = 350 - 10t$; $t \in (35, 55]$, $\Delta S = 10t - 350$; $t \in (55, 65]$, $\Delta S = 65t - t^2/2 - 1862,5$.

B.1. $Q = \gamma m_c g = 1$ MJ.

2. $m = \rho l S = 3,9$ kg.

3. $t_2 = t_1 + Q/mc = 492,8^\circ\text{C}$.

4. $l_2 = l_0[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = 50,31$ cm; $\Delta l = 3,1$ mm.

5. $F = SE\Delta l/l_0 = SE\alpha(t_2 - t_1) = 1,23 \cdot 10^6$ N.

C.1. $C = \epsilon_0 S/d = 8,856$ pF; $E = U/d = 20$ kV/m.

2. $Q = CU$, $n_e = Q/e = 1107 \cdot 10^7$.

3. $F = eE = 3,2 \cdot 10^{-15}$ N.

4. Electronul execută o mișcare accelerată, părăsind armătura negativă fără viteză inițială: $d = at^2/2$, unde $a = F/m_e = 35,2 \cdot 10^{14}$ m/s², $t = \sqrt{2d/a} = d/\sqrt{2m_e/eU} = 2,38$ ns.

II.5. A.1. $L_0 = Fd \cdot \cos \beta = 2400$ J.

2. $L_r = -\mu(mg - F \sin \beta)d = -1800$ J.

3. $L = mad = L_0 + L_r = 600$ J, $a = [F \cos \beta - \mu(mg - F \sin \beta)]/m = 1$ m/s².

4. $v = \sqrt{2ad} = 20$ m/s.

5. $mv = (m + m)u \Rightarrow u = v/2 = 10$ m/s.

6. $Q = mv^2/2 - 2mu^2/2 = 300$ J.

7. $a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, $t_u = -u/a_1$; $h = -u^2 \sin \alpha / 2a_1 = 10/3$ m.

8. La coborîrea pe planul înclinat $a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 5/\sqrt{2}$ m/s². La baza planului înclinat $v_2 = \sqrt{2a_2 h / \sin \alpha} = 10/\sqrt{3}$ m/s. Distanța străbătută pe planul orizontal de cele două corpuri pînă la oprirea lor este: $d_1 = -v_2^2 / 2a_3$, unde $a_3 = -\mu g$; se obține $d_1 = 10/3$ m.

9. $\gamma = 1 - T_2/T_1 = 1 - 1/k$, $\gamma = L/Q_1 = L/nQ \Rightarrow n = Lk/Q(k-1) = 2000$.

B.1. $E = Q/4\pi\epsilon_0 d^2 = 5,4$ kV/m; $V = Q/4\pi\epsilon_0 d = 540$ V.

2. $mg = Qq/4\pi\epsilon_0 h^2$, $h = \sqrt{Qq/4\pi\epsilon_0 mg} = 0,09$ m.

3. Se folosește legea conservării energiei. În starea inițială energia totală a sistemului este $E_i = mv_0^2/2 + mgh + Qq/4\pi\epsilon_0 h$, iar în starea finală $E_f = mg(h - x) + Qq/4\pi\epsilon_0 (h - x)$. Din $E_i = E_f$ și $Qq/4\pi\epsilon_0 h = mgh$ (de la punctul 2), se obține $x = -v_0^2(1 \pm \sqrt{1 + 8gh/v_0^2})/4g$, $h - x = h + v_0^2(1 \pm \sqrt{1 + 8gh/v_0^2})/4g = (0,115 \pm 0,071) \text{ m}$.

II.6. A.1. Corpul m_1 urcă, iar corpul m_2 coboară cu accelerația $a = g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2) = 2 \text{ m/s}^2$; $T_1 = m_1(g + a) + m_2(g - a) = 4gm_1m_2/(m_1 + m_2) = 2,4 \text{ N}$.

2. La fel ca la punctul 1.

3. $T_3 = 4g_3m_1m_2/(m_1 + m_2) = 2,88 \text{ N}$, unde $g_3 = g + a_3$;

4. $T_4 = 4g_4m_1m_2/(m_1 + m_2) = 1,92 \text{ N}$, unde $g_4 = g - a_0$.

5. Ascensorul în cădere liberă.

B.1. $N = \nu N_A = N_A m/\mu = 2,084 \cdot 10^{23}$ molecule.

2. $Q = mc_p \Delta T = rI^2 t \Rightarrow \Delta T = rI^2 t / mc_p = 17,28^\circ \text{C}$.

3. Transformare izobară: $V_0/T_0 = V_1/T_1 = (V_1 - V_0) : (T_1 - T_0) \Rightarrow \Delta V/\Delta T = V_0/T_0$ și $V_0 p = mRT_0/\mu \Rightarrow d = mR\Delta T/\mu p A = 0,248 \text{ m}$.

4. $V_1/T_1 = (V_1 + \Delta V')/T_2 \Rightarrow \Delta V'/(T_2 - T_1) = mR/\mu p \Rightarrow \Delta V' = mR(T_2 - T_1)/\mu p$ (1). Dar în volumul $V_1 + \Delta V'$ se află $\nu = m/\mu \text{ kmol}$ aer la presiunea p și temperatura T_2 . Tot în aceleași condiții, în volumul $\Delta V'$ de aer evacuat se află $\Delta \nu = \nu \Delta V'/(V_1 + \Delta V')$ (2). Înlocuind $\nu = m/\mu$, $\Delta \nu = \Delta m/\mu$, $V_1 + \Delta V' = mRT_2/\mu p$, din (1) și (2) se obține $\Delta m = m(T_2 - T_1)/T_2 \text{ kg}$.

C.1. $Q_1 = Q_2 = UC_1C_2/(C_1 + C_2) = 10^{-4} \text{ C}$; $U_1 = Q_1/C_1 = 100 \text{ V}$, $U_2 = Q_2/C_2 = 200 \text{ V}$.

2. $Q'_1 = UC_1(C_2 + C_3)/(C_1 + C_2 + C_3) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, $U'_1 = Q'_1/C_1 = 150 \text{ V}$, $U'_2 = Q'_1/(C_2 + C_3) = 150 \text{ V}$; $Q'_2 = C_2U'_1 = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, $Q'_3 = C_3U'_1 = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ C}$.

II.7. A.1. $F_1 = m_1g/2 = 3750 \text{ N}$, $F_2 = m_1(g + a)/2 = 4500 \text{ N}$.

2. $F_f = 2m_2g/2 = 500 \text{ N}$.

3. $\Delta l_1/l = m_1g/SE = 0,75 \cdot 10^{-3}$; $\Delta l_2/l = m_1(g + a)/SE = 0,9 \cdot 10^{-3}$.

4. $L_1 = m_1gh = 150 \text{ kJ}$, $L_2 = m_1(g + a)h = 180 \text{ kJ}$.

5. $t = L_1/P = 30 \text{ s}$.

B.1. $V_1 = \nu RT_1/p = 0,07479 \text{ m}^3$.

2. $T_2 = pV_2/\nu R = 400 \text{ K}$.

3. $L = p(V_2 - V_1) = 2,49 \text{ kJ}$.

4. $Q = \Delta U + L$, $U_1 = 3\nu RT_1/2$, $U_2 = 3\nu RT_2/2$, $Q = 3\nu R(T_2 - T_1)/2 + p(V_2 - V_1) = 6,23 \text{ kJ}$.

$$\text{C.1. } V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_{2i}}{R_2} + \frac{q_{2e}}{R_2} + \frac{q_{3i}}{R_3} \right],$$

unde $q_{2i} = -q_1$ reprezintă sarcina indusă pe fața interioară a sferei 2 de către sarcina q_1 a sferei 1, $q_{2e} = q_2 + q_1$ este sarcina feței exterioare a sferei 2, $q_{3i} = -q_{2e}$ este sarcina indusă pe fața interioară a sferei 3.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[q_1 \frac{R_3 - R_1}{R_1 R_3} + q_2 \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \right] = \\ &= 1050 \text{ V}, V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_2 + q_1) \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} = 600 \text{ V}, V_3 = 0 \end{aligned}$$

(sfera exterioară este legată la pământ).

II.8. A.1. $m_2 a_1 = m_2 g - \mu m_2 a - T$ și $m_1 a_1 = T - [m_1 a \cos \alpha + m_1 g \sin \alpha + \mu m_1 (g \cos \alpha - a \sin \alpha)] \Rightarrow a_1 = [m_2 (g - \mu a) - m_1 a (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - m_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] / (m_1 + m_2) = 2,88 \text{ m/s}^2$.

2. $T = [g(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\mu + \mu \sin \alpha - \cos \alpha)] m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 26,1 \text{ N}$.

3. $a_1 = 0 \Rightarrow a = g[m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] / [m_2 \mu + m_1(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)] = 9,9 \text{ m/s}^2$.

B.1. $\eta = L/Q_1 = 0,4$; $\eta = 1 - T_2/T_1 \Rightarrow T_2 = 284 \text{ K}$, $t_2 = 11^\circ\text{C}$.

2. $P_u = \eta m q / t = 26,7 \text{ kW}$.

3. $V = m_0 R T_1 / p_\mu = 38,8 \text{ l}$.

4. $E_c = 3 k T_2 / 2 = 3 R T_2 / 2 N_A = 5,88 \cdot 10^{-21} \text{ J}$; $v_T = \sqrt{3 R T_2 / \mu} = 503 \text{ m/s}$.

C.1. Din $V_1 = q_1 / 4\pi \epsilon_0 R_1 + q_2 / 4\pi \epsilon_0 R_2$ și $V_2 = (q_1 + q_2) / 4\pi \epsilon_0 R_2$ se obține $q_1 = 4\pi \epsilon_0 (V_1 - V_2) R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ și $q_2 = 4\pi \epsilon_0 (V_2 R_2 - V_1 R_1) / (R_2 - R_1)$;

2. $\sigma_1 = q_1 / S_1 = \epsilon_0 (V_1 - V_2) R_2 / R_1 (R_2 - R_1)$, $\sigma_2 = q_2 / S_2 = \epsilon_0 (V_2 R_2 - V_1 R_1) / R_2 (R_2 - R_1)$.

3. Pentru $x \in (0, R_1)$, $E = 0$, $V = q_1 / 4\pi \epsilon_0 R_1 + q_2 / 4\pi \epsilon_0 R_2$; pentru $x \in [R_1, R_2]$, $E = q_1 / 4\pi \epsilon_0 x^2$, $V = q_1 / 4\pi \epsilon_0 x + q_2 / 4\pi \epsilon_0 R_2$; pentru $x \geq R_2$, $E = (q_1 + q_2) / 4\pi \epsilon_0 x^2$, $V = (q_1 + q_2) / 4\pi \epsilon_0 x$.

II.9. A.1. $T = 2\pi \sqrt{l \cos \alpha / g} = 1,85 \text{ s}$.

2. $F = \frac{mg}{\cos \alpha} = 2,3 \text{ N}$.

3. $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F'}{ES} = 1,15 \cdot 10^{-4}$.

4. $\cos \alpha_{\max} = g / 4\pi^2 v^2 l$, $F'_{\max} = 4\pi^2 v^2 m l = 7,9 \text{ N}$.

5. $v_0 = \omega R = 2\pi v l \sin \alpha_{\max} = 6,08 \text{ m/s}$; $a = -\mu g = -2 \text{ m/s}^2$, $t_0 = v_0 / \mu g = 3,04 \text{ s}$, $d = 9,24 \text{ m}$.

B.1. $y = A \sin \omega t$, $v = \omega A \cos \omega t$, unde $\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$; $v = 2 \cos [(41/4)\pi] = \sqrt{2} \text{ m/s}$.

2. Transformare izocoră: $p_0/T_0 = p_1/T_1 \Rightarrow p_1 - p_0 = p_0 \Delta T / T_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $F = (p_1 - p_0)S = 4 \cdot 10^3 \text{ N}$.

3. Transformare izotermă: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, unde $V_2 - V_1 = Sx$, $V_1 = lS$, $(p_2 - p_0)S = kx$, $p_1 = p_0 + p_0 \Delta T / T_0$. Se obține ecuația $kx^2 + x(kl + p_0 S) - p_0 S l \Delta T / T_0 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$, $x = 1 \text{ m}$.

C.1. Sarcina pe unitatea de lungime a inelului este $Q/2\pi r$. Pe un segment mic de arc Δs se află sarcina $\Delta Q = Q \Delta s / 2\pi r$. În punctul M (fig. II.9.C) acest element generează un câmp electric $\Delta E = \Delta Q / 4\pi \epsilon_0 A M^2 = Q \Delta s / 8\pi^2 \epsilon_0 r (x^2 + r^2)$. Acest câmp electric poate fi descompus în două

componente $\Delta E_x = \Delta E \cos \theta = Q \Delta s x / 8\pi^2 \epsilon_0 r l (x^2 + r^2)$ de-a lungul axei și E_r , radială, normală la axă. Componentele radiale sînt egale și uniforme distribuite, rezultanta lor fiind egală cu zero. Câmpul electric rezultat al sarcinilor de pe inel este un vector de-a lungul axei Ox avînd modulul $E = E_x = Qx / 4\pi \epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}$.

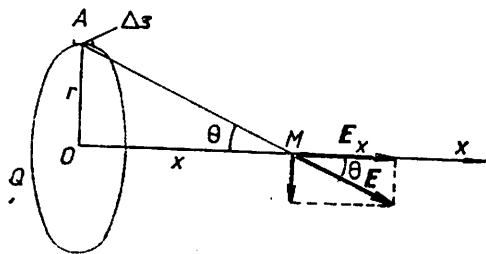


Fig. II.9.C

2. Pentru ca sarcina q să se afle într-un punct M pe axa Ox trebuie ca rezultanta R a forțelor electrice $F_e = qE$ și de greutate $G = mg$ să fie de-a lungul firului. Din asemănarea triunghiului AOM cu triunghiul format de G , F_e și R avem: $x/r = F_e/G \Rightarrow x/r = qQx/4\pi\epsilon_0 l^3 mg \Rightarrow l = (qQr/4\pi\epsilon_0 mg)^{1/3} = 0,182 \text{ m}$.

II.10. A.1. Se folosește legea conservării energiei mecanice pentru pendulul elastic: $E_{e\max} + 0 = 0 + E_{p\max} \Rightarrow (m_1 + m_2)v_0^2 = kA^2 \Rightarrow A = v_0/\sqrt{(m_1 + m_2)/k} = 0,14 \text{ m}$.

2. $E_{p\max} = E_{e\max} = (m_1 + m_2)v_0^2/2 = 5 \text{ J}$. Accelerația mișcării oscilatorii este $a = -\omega^2 A \sin \omega t$. Valoarea maximă a accelerației este $a_M = -\omega^2 A = -v_0/\sqrt{k/(m_1 + m_2)} = 7,07 \text{ m/s}^2$.

3. Corpul m_2 nu va aluneca pe m_1 în timpul oscilației dacă $\mu m_2 g \geq m_2 |a_M| \Rightarrow \mu_{\min} = v_0/\sqrt{k/(m_1 + m_2)}/g = 0,707$, $F_f = \mu m_2 g = 28,28 \text{ N}$.

B.1. $p = (N_1 + N_2)kT/V = 248,4 \text{ N/m}^2$; $p_1 = N_1 kT/V = 218,6 \text{ N/m}^2$, $p_2 = N_2 kT/V = 29,8 \text{ N/m}^2$.

2. $E_c = (N_1 + N_2)3kT/2 = 93,15 \text{ J}$, $(v_T)_{\text{co}_2} = \sqrt{3RT/\mu_{\text{co}_2}} = 583,2 \text{ m/s}$; $(v_T)_{\text{vaporl}} = 911,8 \text{ m/s}$.

3. $V_{\text{co}_2} p = V p_1 \Rightarrow V_{\text{co}_2} = 0,22 \text{ m}^3$; $V_{\text{vaporl}} p = V p_2 \Rightarrow V_{\text{vaporl}} = 0,03 \text{ m}^3$.

C.1. La echilibru, rezultanta forțelor electrice și greutate se află de-a lungul firului de suspensie: $F = G \tan(\alpha/2)$ (1), unde $F = q^2/4\pi\epsilon_0 r^2 = q^2/16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2(\alpha/2)$ și $G = mg$. Rezultă $q = 2l \sin(\alpha/2)\sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan(\alpha/2)} = 9,33 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

2. Condiția de echilibru devine: $F' = (G - F_A) \tan(\beta/2)$ (2), unde $F' = q^2/16\pi\epsilon_0 \epsilon_r l^2 \sin^2(\beta/2)$ și $F_A = \rho_0 V g = \rho_0 mg/\rho$ este forța arhimedică. Din (1) și (2) se obține $\epsilon_r \sin^2(\beta/2)/\sin^2(\alpha/2) = \rho \tan(\alpha/2)/[(\rho - \rho_0) \tan(\beta/2)] \Rightarrow \epsilon_r(\rho - \rho_0) \cdot \sin^2(\beta/2) \tan(\beta/2) = \rho \sin^2(\alpha/2) \tan(\alpha/2)$ (3). Înlocuind, (3) conduce la ecuația $\tan^3(\beta/2) - 1,3 \tan^2(\beta/2) - 1,3 = 0$ cu soluția reală $\tan(\beta/2) = 1,73 \simeq \sqrt{3} \Rightarrow \beta/2 = 60^\circ$.

3. Din (3) pentru $\alpha = \beta$ se obține $\rho = \epsilon_r \rho_0/(\epsilon_r - 1) = 1125 \text{ kg/m}^3$.

4. Fie qx sarcina electrică a unei sfere cind $\alpha_1 = 60^\circ$. Relația (1) scrisă pentru $\alpha = 90^\circ$ și pentru $\alpha_1 = 60^\circ$ conduce la $x = (\sin(\alpha_1/2)/\sin(\alpha/2)) \cdot \sqrt{\tan(\alpha_1/2)/\tan(\alpha/2)} = 0,54$. Descroșterea sarcinii reprezintă $\Delta q = q - 0,54 \cdot q = 0,46 q$.

II.11. A.1. $F_t = F_f + ma$, $a = (v_2^2 - v_1^2)/2L_1 = 0,175 \text{ m/s}^2$, $F_f = \mu mg$ și $F_t = 4350 \text{ N}$.

2. $F_{cf} = mv_2^2/R$ cu $l_2 = 2\pi R/4$; se obține $F_{cf} = 2093,3 \text{ N}$.

3. $t_1 = (v_2 - v_1)/a = 28,57 \text{ s}$, $t_2 = l_2/v_2 = 30 \text{ s}$, $t = t_1 + t_2 = 58,57 \text{ s}$.

4. $F_{cf} \geq \mu mg \Rightarrow v_1 = \sqrt{\mu g R} = 27,64 \text{ m/s}$, $F_{cf} h \geq mg \Delta l/2 \Rightarrow v_r = \sqrt{g \Delta l R/2h} = 59,84 \text{ m/s}$.

B. $p = 2n_0 m_0 (u + v)^2$.

C.1. $I = (E_1 r_2 r_3 + E_2 r_3 r_1 + E_3 r_1 r_2)/[R(r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2) + r_1 r_2 r_3] = 54,87 \text{ mA}$.

$$2. I' = (E_1 r_2 + E_2 r_1) / [R(r_1 + r_2) + r_1 r_2] = 49 \text{ mA}, I'_1 = (E_1 - RI') / r_1 = 10 \text{ mA}, I'_2 = (E_2 - RI') / r_2 = 40 \text{ mA}.$$

$$3. U = (E_1 / r_1 + E_2 / r_2) : (1/R + 1/R_0 + 1/r_1 + 1/r_2) = 0,98 \text{ V}.$$

II.12. A. Accelerația sistemului de corpuri m_1, m_2 este $a_1 = m_2 g / (m_1 + m_2)$, iar timpul de cădere pentru m_2 este $t_c = \sqrt{2h/a_1}$. Potrivit principiului acțiunilor reciproce $m_1 a_1 = (M + m_1 + m_2) a$, astfel că sistemul format din cub împreună cu corpurile m_1 și m_2 se deplasează pe masă cu accelerația $a = m_1 a_1 / (M + m_1 + m_2)$ în timp t_c , adică $x = at_c^2 / 2 = m_1 h / (M + m_1 + m_2) = 0,1 \text{ m}$.

B.1. În starea inițială $p_1 V_1 = v_1 R T_1, p_2 V_2 = v_2 R T_2$. În starea finală $p V_1 = v'_1 R T_1, p V_2 = v'_2 R T_2$, unde $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$. Se obține $p = (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2) : (V_1 / T_1 + V_2 / T_2)$.

2. Temperatura în cele două vase devine T , astfel că $v_1 C_v (T - T_1) = v_2 C_v (T_2 - T) \Rightarrow (v_1 + v_2) T = v_1 T_1 + v_2 T_2$. Se obține $p = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (V_1 + V_2)$ și $T = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2)$.

C.1. Din sistemul $I = I_1 + I_2, E_1 = IR + I_1 r, E_2 = IR + I_2 r, (E_2 - I_2 r) I_2 = (1 + f)(E_1 - I_1 r) I_1$, se obține $E_2 = E_1 [(2 + f)R + (1 + f)r] / [(2 + f)R + r] = 13 \text{ V}$.

2. $I_1 = (E_2 - E_1) / fr = 2 \text{ A}, I_2 = (1 + f) I_1 = 3 \text{ A}, I = 5 \text{ A}, P_t = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 63 \text{ W}, P_1 = I R I_1 = 20 \text{ W}, P_2 = I R I_2 = 30 \text{ W}$.

II.13. A. $\omega_1 = \sqrt{k/m_1}, \omega_2 = \sqrt{k/m_2}$. În mișcarea oscilatorie a celor două corpuri este posibil ca acestea să aibă la un moment dat același sens, astfel că $\mu(M + m_1 + m_2)g > 2T \Rightarrow \mu = 0,4$.

B.1. Condiția de echilibru a pistoanelor după încălzirea aerului și deplasarea punctului O spre dreapta pe distanța x se scrie $kx + S_1(p - p_0) - F = 0$ (1), $S_2(p - p_0) - F = 0$ (2), unde F este tensiunea din tijă, p presiunea aerului din incintă la $T = T_0 + \Delta T$. Aerul din incintă suferă o transformare izocoră: $p_0 / T_0 = p / (T_0 + \Delta T)$ (3). Eliminând F și p din (1), (2), (3) se obține $x = p_0 (S_2 - S_1) \Delta T / k T_0 = 0,25 \text{ m}$.

$$2. L = kx^2 / 2 = 12,5 \text{ J}.$$

C.1. $I = E : [r + R_3 + R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] = 10 \text{ A}, I_1 = I R_2 / (R_1 + R_2) = 8 \text{ A}, I_2 = I R_1 / (R_1 + R_2) = 2 \text{ A}$.

2. $V_B = R_3 I = 40 \text{ V}, V_A = -I(r + R_4) + E = I[R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] = 48 \text{ V}, V_A - V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2 = 8 \text{ V}$.

3. $P_t = EI = 600 \text{ W}, P_t = r I^2 = 20 \text{ W}, P_u = [R_3 + R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] I^2 = 580 \text{ W}, P_t = P_t + P_u$.

$$4. mc(\theta - \theta_0) = r R_3 I^2 t \Rightarrow m = 3,44 \text{ kg}.$$

II.14. A.1. Se alege un sistem de referință xOy cu Ox în direcția de acțiune a forței F și astfel încît $x_0 = 0, v_0 = 0$. Avem $mv_1^2 / 2 + kx_1^2 / 2 = Fx_1$ (1) cu x_1 deplasarea pentru care forța elastică a resortului este egală și de sens contrar cu F , adică $x_1 = F/k$ (2). Din (2) și (1) se obține $v_1 = x_1 \sqrt{k/m}$. Deși pentru $x = x_1$ forțele se echilibrează, corpul avînd viteză v_1 se va deplasa pînă la x_2 cînd $kx_2^2 / 2 = Fx_2$ (3), de unde $x_2 = 2F/k = 2x_1$. După aceasta corpul se deplasează în sens invers, în mișcare accelerată pînă în punctul $x = x_1$ și încetinită pînă în punctul x_3 dat de $kx_3^2 / 2 = Fx_3 \Rightarrow x_3 = 0$ (soluția $x_3 = 2F/k = x_2$ nu convine). Corpul efectuează oscilații în jurul punctului $x_1 = F/k$ cu amplitudinea $A = x_1$.

2. Dacă F' crește foarte încet de la zero la F' corpul se deplasează din punctul $x_0 = 0$ până în punctul $x = x_1$ unde rămâne în repaus.

B. $p_1 = p_n + (n - 1) mg/S$ (1), $p_1 V_1 = p V_0$ (2), unde V_0 este volumul unui compartiment în starea inițială, adică $V_0 = (1/n) \sum_{k=1}^n V_k = V_1(n + 1)/2$ (3). Rezultă $p_n + (n - 1)mg/S = p(n + 1)/2$ (4). Dar $p_k = p_n + (n - k)mg/S$ (5). Din (4), (5) se obține $p_k = p(n + 1)/2 - (k - 1) mg/S$, $k = 1, 2, \dots, n$.

C.1. $U = P/I = 20 \text{ V}$, $R = P/I^2 = 200 \Omega$.

2. $E = U + rI = 20,1 \text{ V}$.

3. $C = q/U = 1,25 \text{ nF}$.

4. $\nu_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 39,8 \text{ kHz}$.

II.15. A. Dacă nu ar exista peretele din stînga, legea mișcării oscilatorii se scrie $y = d_2 \sin \omega t$ și $v = \omega d_2 \cos \omega t$, unde $\omega = \sqrt{k/m}$. Pentru $y = d_1$ avem $d_1 = d_2 \sin \omega t_{BC} \Rightarrow t_{BC} = \sqrt{m/k} \arcsin(d_1/d_2)$. În plus, $t_{AB} = T_0/4 = (\pi/2)\sqrt{m/k}$. Rezultă $T = 2(t_{AB} + t_{BC}) = 2\sqrt{m/k} \cdot (\pi/2 + \arcsin(d_1/d_2))$. Pentru $d_1 = d_2$ se obține $T = T_0$.

B.1. $p_1 V_1 = \nu R T_1$, $p_2 V_2 = \nu R T_2$, $V_2 = n V_1$, $p_1 = a V_1$, $p_2 = a V_2 = n a V_1 \Rightarrow T_2 = n^2 T_1 = 2700 \text{ K}$, $p_2 = n p_1 = 90 \text{ kPa}$.

2. În diagrama $p - V$ transformarea se reprezintă printr-un segment de dreaptă care unește punctele $A(V_1, p_1)$, $B(V_2, p_2)$ și lucrul mecanic este numeric egal cu aria limitată de segmentul AB , dreptele $V = V_1$, $V = V_2$ și axa absciselor, adică $L = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = p_1 V_1(n^2 - 1)/2 = 36 \text{ kJ}$.

3. $\Delta U = U_2 - U_1 = 3\nu R(T_2 - T_1)/2 = 3(p_2 V_2 - p_1 V_1)/2 = 3p_1 V_1(n^2 - 1)/2 = 108 \text{ kJ}$; $Q = \Delta U + L = 2p_1 V_1(n^2 - 1) = 144 \text{ kJ}$.

C.1. $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -B(S_2 - S_1)/\Delta t$ unde $S_2 = v^2(t + \Delta t)^2 \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $S_1 = v^2 t^2 \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Rezultă $e = -2Bv^2 t \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)$ (termenul care conține pe Δt este neglijabil deoarece $\Delta t \rightarrow 0$). Sensul t.e.m. induse este de la A spre B .

2. $i = e : [r(2vt \operatorname{tg}(\alpha/2) + 2vt/\cos(\alpha/2))] = -(Bv \sin(\alpha/2)) : [r(1 + \sin(\alpha/2))] = 25 \text{ A}$.

3. Forța mecanică necesară deplasării conductorului AB cu viteză constantă este egală și de sens contrar forței electromagnetice

$$F = -Bil = \left(2B^2 v^2 t \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) : \left[r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 108,1 \text{ N}.$$

II.16. A.1. $T_{BC} = -mg\sqrt{AB^2 + AC^2}/AC = -500 \text{ N}$, $T_{AB} = mgAB/AC = 300 \text{ N}$.

2. $t = \sqrt{2h/g} = 1,41 \text{ s}$, $v = \sqrt{2gh} = 14,1 \text{ m/s}$.

3. $h' = h/(1 + f) = 8 \text{ m}$.

B.1. $\rho = \mu p / R(T_0 + az)$, $E_c = 3k(T_0 + az)/2$, $v_T = \sqrt{3R(T_0 + az)/\mu}$.

2. $V = \nu RT/p = 20 \text{ m}^3$.

3. $U_1 = 3(\nu RT - p_a V)/2 = 6,972 \text{ MJ}$.

C.1. $I = U_0/R = \text{const.}$ și $I = -\Delta Q/\Delta t = -U_0[C(t + \Delta t) - C(t)]/\Delta t$, de unde $C(t + \Delta t) - C(t) = -\Delta t/R$. Pentru $t = 0$, $C(0) = C_0$ și $C(\Delta t) = C_0 - \Delta t/R$ sau $C(t) = C_0 - t/R$; $Q = U_0(C_0 - t/R)$, $I = U_0/R = 0,2 \text{ mA}$.

2. Variația energiei înmagazinată în condensator este $\Delta W = U_0^2 \Delta C/2 = U_0^2 \Delta t/2R$, de unde puterea consumată $P = \Delta W/\Delta t = U_0^2/2R = 1 \text{ mW}$.

II.17. A.1. Se consideră axa Ox în direcția mișcării mobilelor (fig. II.17.A): $x_1 = v_1 t$, $x_2 = d + v_{02} t + a_2 t^2/2$. În momentul întâlnirii $x_1 = x_2$; se obține

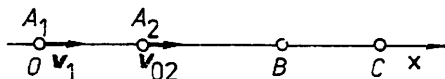


Fig. II.17.A

$t_1 = 10 \text{ s}$, $t_2 = 20 \text{ s}$ (mobilele se întâlnesc de două ori: mai întâi în B și apoi în C). $OB = v_1 t_1 = 400 \text{ m}$, $OC = v_1 t_2 = 800 \text{ m}$.

2. $v_{1B} = v_1 = 40 \text{ m/s}$, $v_{2B} = v_{02} + a_2 t_1 = 30 \text{ m/s}$; $v_{1C} = 40 \text{ m/s}$, $v_{2C} = v_{02} + a_2 t_2 = 50 \text{ m/s}$.

3. $v_1 = v_2 \Rightarrow t_3 = (v_1 - v_{02})/a_2 = 15 \text{ s}$.

4. $x_2 - x_1 = d/2 \Rightarrow t_4 = 5(3 - \sqrt{5}) \text{ s}$, $t_5 = 5(3 + \sqrt{5}) \text{ s}$.

5. $t_6 = 30 \text{ s}$.

B.1. Inițial, resortul fiind relaxat, aerul din cilindru are parametrii $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$, $V_1 = Sl = 0,5 \text{ S (m}^3\text{)}$ și $T_1 = 300 \text{ K}$. După încălzire parametrii devin: p_2 , $V_2 = S(0,5 + \Delta l_1)$, $T_2 = 400 \text{ K}$, astfel că $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$ (1). La echilibru, la temperatura T_2 , forța elastică dezvoltată de resort este egală cu forța datorită presiunii exercitate de aer asupra pistonului: $k\Delta l_1 = (p_2 - p_0)S$ (2). Din (1) și (2) se obține $\Delta l_1 \approx 2,66 \text{ cm}$. După răcire, parametrii gazului sînt: p'_2 , $V'_2 = S(0,5 - \Delta l_2)$, $T'_2 = 200 \text{ K}$ și ecuația (2) se scrie $k\Delta l_2 = (p_0 - p'_2)S$ (3). Din (1) și (3) se obține $\Delta l_2 \approx 2,92 \text{ cm}$.

2. Considerînd transformarea de la starea p_1, V_1, T_1 la starea p, V, T , avem: $V = S(l + \Delta l)$, $k\Delta l = (p - p_0)S$ și $p_1 V_1/T_1 = pV/T$. Se obține $T = 300(20\Delta l^2 + 12\Delta l + 1)$ și graficul este un arc de parabolă (pentru $T \geq 300 \text{ K}$).

3. Gradațiile termometrului nu ar fi echidistante (T este o funcție de gradul doi de Δl), iar indicațiile termometrului ar depinde de presiunea atmosferică.

C.1. $C = \epsilon_0 \epsilon_r S/d \Rightarrow \epsilon_r = Cd/\epsilon_0 S = 9,9$.

2. $Q = CU_c = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

3. $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = \pi \cdot 10^5/2 \text{ s}^{-1}$, $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 25 \text{ kHz}$.

4. $I = U_m/\sqrt{2[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]} = 10 \text{ mA}$, $\varphi = \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R] = -\pi/4$.

II.18. A.1. La coborîre $a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 3,2 \text{ m/s}^2$; la urcare $a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -6,6 \text{ m/s}^2$.

2. Înainte de prima ciocnire $v_1 = \sqrt{2a_c l_0}$. Distanța străbătută de corp după prima ciocnire (care este perfect elastică) pînă la oprirea pe planul înclinat este $l_1 = -v_1^2/2a_u = -a_c l_0/a_u$. Viteza corpului înainte de a doua ciocnire este $v_2 = \sqrt{2a_c l_1} \approx 2,8 \text{ m/s}$. După ciocnirea a doua (perfect elastică) viteza corpului este egală cu v_2 dar de sens contrar.

3. Distanța străbătută de corp după a doua ciocnire pînă la oprirea pe planul înclinat este $l_2 = -v_2^2/2a_u = -l_1 a_c/a_u = l_0(a_c/a_u)^2 = 0,59 \text{ m}$. Înălțimea maximă la care urcă corpul după a doua ciocnire este $h_2 = l_2 \sin \alpha = 0,29 \text{ m}$. În general, înălțimea maximă la care urcă corpul după a n -a ciocnire este $h_n = l_n \sin \alpha = (-1)^n l_0(a_c/a_u)^n \cdot \sin \alpha$, iar viteza înainte de ciocnirea $n+1$ este $v_{n+1} = \sqrt{2a_c l_n} = \sqrt{(-1)^n 2l_0 a_c (a_c/a_u)^n}$.

$$4. L_r = -F_f(l_0 + 2l_1) = -\mu mgl_0 \cdot (1 - 2a_c/a_u) \cos \alpha$$

$$\text{B.1. } \nu = 5 \text{ Hz, } \varphi_0 = \pi/3.$$

$$2. t_n = [(-1)^n - 1]/30 + n/10, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$3. \text{ La } t = t_n, E_p = ky^2/2 = 0,75 \pi^2/8 \text{ J, } E_c = E_t - E_p = kA^2/2 - ky^2/2 = 0,25 (\pi^2/8) \text{ J.}$$

4. Punctele x_1 și x_2 oscilează după legile $y_1 = 0,5 \sin 2\pi(t/T - x_1/\lambda)$, $y_2 = 0,5 \sin 2\pi(t/T - x_2/\lambda)$ cu $T = 1/\nu = 0,2 \text{ s}$ și $\lambda = v_f T = 68 \text{ m}$. Diferența de fază este $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda = 5\pi/2$, sau reducînd la cadrul I: $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$.

$$\text{C.1. } E_c = 3kT/2, E_{c1} = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ J, } E_{c2} = 8,3 \cdot 10^{-21} \text{ J.}$$

2. Din $\gamma = C_p/C_v$ și relația lui Mayer, $C_p = C_v + R$, se obține $\gamma = 5/3$.

3. La deschiderea robinetului gazele trec prin următoarele stări: $(p_i, V_i, T_i) \rightarrow (p'_i, V_1 + V_2, T_i) \rightarrow (p''_i, V_1 + V_2, T)$, $i = 1, 2$. La transformarea din starea II în starea III, gazul 1 primește căldură de la gazul 2: $v_1 C_v(T - T_1) = v_2 C_v(T_2 - T)$. Înlocuind $v_i = p_i V_i / RT_i$, $i = 1, 2$, se obține $T = (p_1 V_1 + p_2 V_2) : (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2) = 323 \text{ K}$. Considerînd transformarea I $\rightarrow$ III, avem $p_i V_i / T_i = p'_i (V_1 + V_2) / T$, de unde $p'_i = p_i V_i T / T_i (V_1 + V_2)$, $i = 1, 2$; $p'_1 = 89,7 \text{ kPa}$, $p'_2 = 26,9 \text{ kPa}$.

D. Din $\varphi_s + \varphi_p = \pi/2$, $\text{tg } \varphi_s = L\omega/R$, $\text{tg } \varphi_p = 1/RC\omega$ se obține $L = R^2 C$.

II.19. A.1. Se consideră un sistem de referință legat de camion, cu originea în fața camionului și axa Ox în direcția mișcării. Inițial automobilul se afla în punctul de abscisă $x_0 = -(l_2 + d_1) = -52 \text{ m}$. După depășire, automobilul se află în punctul de abscisă $x_1 = d_2 + l_1 = 29 \text{ m}$. În sistemul de referință ales, automobilul are de parcurs distanța relativă $x_1 - x_0 = 81 \text{ m}$, cu viteza relativă $v = (v_0 + at) - v_0 = at$. Se obține $t = \sqrt{2(x_1 - x_0)/a} = 18 \text{ s}$.

$$2. s = v_0 t + at^2/2 = 441 \text{ m.}$$

$$3. v = v_0 + at = 29 \text{ m/s.}$$

$$\text{B.1. } m = 0,1 \text{ kg vapori.}$$

$$2. V = mRT/\mu p = 172,2 \text{ l.}$$

3. Cantitatea de căldură cedată de vapori în timpul τ este egală cu căldura transferată mediului exterior prin pereți: $m_2 \lambda + m_2 c(100 - t_3) = P\tau$, de unde $D = m_2/\tau = P/[\lambda + c(100 - t_3)] = 10^{-3} \text{ kg/s}$.

$$4. \nu = m/\mu = 5,56 \text{ mol}; \quad N = \nu N_A = 3,34 \cdot 10^{24} \text{ molecule}, \quad \epsilon = \\ = 3kT/2 = 3RT/2N_A = 77 \cdot 10^{-22} \text{ J}.$$

C.1. Asupra conductorului din A acționează forțe electromagnetice de respingere din partea conductorilor B și C , egale în modul (fig. II.19.C.1)

$F_{BA} = F_{CA} = \mu_0 I_A I_B l / 2\pi a$, astfel că $F_A^2 = F_{BA}^2 + F_{CA}^2 + 2F_{BA}F_{CA} \cos 60^\circ$, de unde $F_A/l = \mu_0 I_A I_B \sqrt{3} / 2\pi a = 4\sqrt{3} \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Potrivit figurii II.19.C.1, $F_B^2 = F_{AB}^2 + F_{CB}^2 + 2F_{AB}F_{CB} \cos 120^\circ$ de unde $F_B/l = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-5} \text{ N}$ și analog $F_C/l = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

2. Din figura II.19.C.2: $B_{A_1} = B_{AA_1} + B_{BA_1} + B_{CA_1} = B_{AA_1}$, și $B_{A_1} = 2 \cdot 10^{-5} / \sqrt{3} \text{ T}$; $B_{B_1} = B_{BB_1} + B_{AB_1} + B_{CB_1}$, $B_{B_1} = (2\sqrt{7/3}) \cdot 10^{-5} \text{ T}$; $B_{C_1} = B_{BC_1} + B_{AC_1} + B_{CC_1}$, $B_{C_1} = (2\sqrt{7/3}) \cdot 10^{-5} \text{ T}$; $B_G = B_{AG} + B_{BG} + B_{CG}$, $B_G = (3\sqrt{3}/2) \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

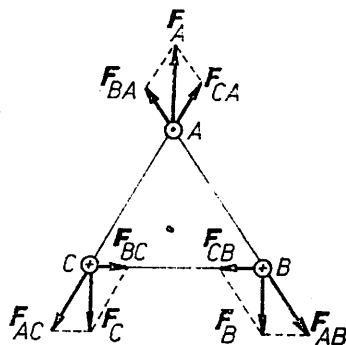


Fig. II.19.C.1

II.20. A.1. Localitățile A, B sînt așezate în sensul curgerii apei, v_a este viteza apei față de mal, v_b este viteza bărcii față de apă: $v_{AB} = v_b + v_a$, $v_{BA} = v_b - v_a$. Se obține: $v_b = d/(t - \tau) + d/(t + \tau) = 28 \text{ km/h}$, $v_a = d/(t - \tau) - d/(t + \tau) = 4 \text{ km/h}$.

$$2. t_1 = 2d/v_b = 3,43 \text{ h}.$$

B.1. Potrivit figurii II.20.B avem: $F_1 = G_t = G \sin \alpha$ și $F_1 = F_2 \cos \alpha$, de unde $G = F_1 F_2 / \sqrt{F_2^2 - F_1^2} = 10 \text{ N}$.

$$2. \alpha = 30^\circ.$$

$$3. N_1 = G_n = 5\sqrt{3} \text{ N}; \quad N_2 = G_n + F_2 \sin \alpha = 20/\sqrt{3} \text{ N}.$$

4. Din $G_t = F_1 + F_{1f}$, $G_t = F_2 \cos \alpha + F_{2f}$, cu $F_{1f} = \mu G_n$ și $F_{2f} = \mu(G_n + F_2 \sin \alpha)$, se obține $\sin \alpha - \mu \cos \alpha = F_1/G$, $\cos \alpha + \mu \sin \alpha = F_2/G$, de unde $G = F_1 F_2 / \sqrt{(1 + \mu^2) F_2^2 - F_1^2} = 50/7 \text{ N}$.

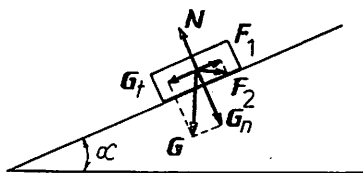


Fig. II.20.B

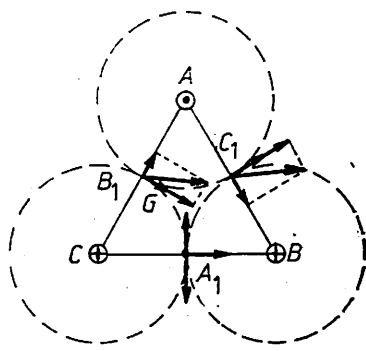


Fig. II.19.C.2

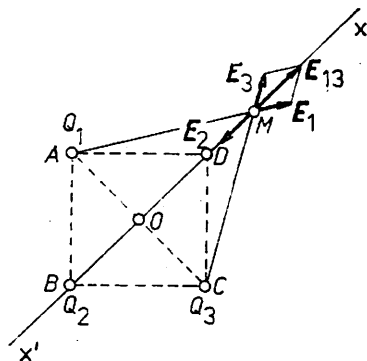


Fig. II.20.C

C.1. $E(x) = E_M = E_1 + E_3 + E_2 = E_{13} + E_2$ (fig. II.20.C). Dar $E_1/AM = E_{13}/2 \cdot OM \Rightarrow E_{13} = 2|x| Q_1 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (x^2 + a^2/2)^{3/2}$, $E_2 = Q_2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (x + a/\sqrt{2})^2$ cu $x \neq -a/\sqrt{2}$. Rezultă $E(x) = E_{13} + E_2$. Pentru $x = +a/\sqrt{2}$ avem $E_D =$

$= 500 \text{ V/m}$, pentru $x=0$, $E_0 = -400 \text{ V/m}$, iar pentru $x=-a/\sqrt{2}$, $E(-a/\sqrt{2}) = - (96\sqrt{10} - 400) \text{ V/m}$.

2. $L_{DO} = Q_4(V_D - V_O)$; $V_D = Q_1/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a + Q_2/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a/\sqrt{2} + Q_3/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a = -150\sqrt{2} \text{ V}$, $V_O = 2Q_1/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a/\sqrt{2} + 2Q_2/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a/\sqrt{2} + 2Q_3/4\pi\epsilon_0\epsilon_r a/\sqrt{2} = -60(6 - \sqrt{2}) \text{ V}$; $L_{DO} = (21\sqrt{2} - 36) \cdot 10^{-5} \text{ J}$. Din $E_D > 0$ și $E_O < 0$ rezultă că între D și O există un punct M în care $E_M = 0$. Forța electrică care acționează asupra sarcinii electrice pozitive Q_4 are sensul vectorului cîmp electric. Pe segmentul DM forța electrică este îndreptată de la M spre D și deplasarea se face împotriva forței electrice (lucrul mecanic este negativ), iar pe porțiunea MO forța electrică este îndreptată de la M spre O și lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii Q_4 din M în O este pozitiv.

3. $E_n = 0 \Rightarrow E_{13} + E_2 = 0$, de unde $Q'_2 = -12 \text{ nC}$.

II.21. A.1. $F_1 = F_f = \mu_2(m_A + m_B)g = 3,92 \text{ N}$.

2. $F_2 = F_f + F_{f_1} = \mu_2(m_A + m_B)g + \mu_1 m_A g = 4,9 \text{ N}$.

3. $F_3 = F_f + F_{f_1} + T = F_f + 2F_{f_1} = 5,88 \text{ N}$.

B.1. $pV = mRT/\mu \Rightarrow \rho = p\mu/RT$. Din $\rho_1/\rho_2 = p_1 T_2/p_2 T_1$ rezultă $p_2 = p_1 T_2 \rho_2/T_1 \rho_1 = 25 \text{ N/m}^2$.

2. După deschiderea robinetului, presiunea este aceeași în ambele vase: $pV_1 = \nu'_1 RT_1$ și $pV_2 = \nu'_2 RT_2$, de unde $\nu'_1 = V_1 T_2 \nu'_2/V_2 T_1 = 50 \text{ mol}$ (s-a folosit $V_1/V_2 = (1/4)^3$).

3. $\nu_1 + \nu_2 = \nu'_1 + \nu'_2 = 6450 \text{ mol}$. Din $p_1 V_1 = \nu_1 RT_1$, $p_2 V_2 = \nu_2 RT_2$ rezultă $\nu_1/\nu_2 = 125/4$. Se obține $\nu_1 = 6250 \text{ mol}$, $\nu_2 = 200 \text{ mol}$.

4. $\Delta U = U_f - U_i$, unde U_i și U_f reprezintă valorile energiei interne înainte, respectiv după deschiderea robinetului. $\Delta U = (\nu'_1 C_V T_1 + \nu'_2 C_V T_2) - (\nu_1 C_V T_1 + \nu_2 C_V T_2) = C_V [T_1(\nu'_1 - \nu_1) + T_2(\nu'_2 - \nu_2)]$. Din $\nu_1 + \nu_2 = \nu'_1 + \nu'_2$ avem $\nu'_1 - \nu_1 = -(\nu'_2 - \nu_2)$, astfel că $\Delta U = C_V (T_1 - T_2)(\nu'_1 - \nu_1) = -15456,6 \cdot 10^3 \text{ J}$. Energia internă scade și gazul efectuează lucru mecanic.

C. $E = 12 \text{ V}$, $r = 2 \Omega$.

1. Din ecuațiile lui Kirchhoff: $I = I_1 + I_2$, $I = I_4 + I_5$, $I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$, $I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0$, $E = I_2 R_2 + I R_3 + I_4 R_4 + I r$, se obține $I = 1 \text{ A}$, $I_1 = 0,4 \text{ A}$, $I_2 = 0,6 \text{ A}$, $I_4 = 0,2 \text{ A}$, $I_5 = 0,8 \text{ A}$. Curentul prin fiecare ramură a bateriei este $I/2 = 0,5 \text{ A}$.

2. $m = KI_5 t = 0,474 \text{ g}$.

3. $mc\Delta T = R_3 I^2 t \Rightarrow m = 0,34 \text{ kg}$.

4. $N/l = N/Nd = 2500 \text{ spire/m}$, $B = \mu_0 \mu_r N I_1/l = 0,628 \text{ T}$. Din $R_1 = \rho l_1/S_1 = 4\pi\rho DN/\pi d^2$ se obține $D = 0,035 \text{ m}$ și $S = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. $\Phi = BS = 6,03 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$.

II.22. A.1. $t_0 = 2d/v_0 = 5 \text{ s}$.

2. Fie F forța orizontală care acționează asupra platformei de masă M . Platforma acționează asupra corpului de masă m cu forța orizontală F_1 . Corpul va acționa asupra platformei cu o forță egală, dar de sens contrar. Fie a_1 și a_2 accelerațiile platformei și respectiv a corpului față de sol; avem: $Ma_1 = F - F_1$, $ma_2 = F_1$. Dacă $F_1 < \mu mg$, atunci $a_1 = a_2 = F/(M + m)$, iar dacă $F_1 = \mu mg$, atunci $a_1 = (F - \mu mg)/M$ și $a_2 = \mu g$, cu $|a_1| > |a_2|$. Accelerația relativă a corpului față de platformă este $a_r = |a_1| - |a_2| = v_0/t_0 - \mu g = 0,5 \text{ m/s}^2$.

$$3. l_0 = a_r t_0^2 / 2 = 6,25 \text{ m.}$$

4. După oprirea platformei, mișcarea corpului continuă încetinit cu $a = -\mu g$ și $v_0' = v_0 - a_r t_0 = 7,5 \text{ m/s}$. Distanța parcursă de corp pe platformă este $l = l_0 - v_0'^2 / 2a = 25 \text{ m}$.

B.1. $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = \nu R T_1 \ln(p_A/p_B) + \nu(C_V + R) \cdot (T_2 - T_3)$ și $Q_{\text{primit}} = Q_{AB} + Q_{DA} = \nu R T_1 \ln(p_A/p_B) + \nu C_V (T_1 - T_3)$. Dar $p_B V_C = p_A V_B$, sau înlocuind V_C și V_D din $p_B V_C = \nu R T_2$, $p_A V_D = \nu R T_3$ și logaritmand se obține: $\ln(p_A/p_B) = [\gamma/(\gamma-1)] \ln(T_3/T_2) = (C_p/R) \ln(T_3/T_2)$. Rezultă $\eta = L/Q_p = [T_2 - T_3 + T_1 \ln(T_3/T_2)] : [T_1 - T_3 + T_1 \ln(T_3/T_2)]$.

2. Pentru ciclul Carnot $\eta_c = (T_1 - T_r)/T_1 = L_c/Q_{AB}$ și $L_c = \nu R (T_1 - T_r) \ln(p_A/p_B)$. Din $L_c = L$ se obține $T_r = (T_3 - T_2) : \ln(T_3/T_2)$.

3. $\varepsilon = (1 - \eta)/\eta = Q_{\text{ced}}/L$ reprezintă eficiența mașinii frigorifice care funcționează pe ciclul dat, parcurs în sens invers.

C.1. Sub acțiunea forței F un resort se comprimă iar celălalt se alungește cu y . Forțele elastice rezultate sînt $F_1 = -k_1 y$, $F_2 = -k_2 y$ și $F = F_1 + F_2$. Constanta elastică echivalentă a sistemului este $k_e = k_1 + k_2 = 2k$ și deci $A = F/k_e = F/2k = 0,005 \text{ m}$, $\omega = \sqrt{k_e/m} = 100\sqrt{2} \text{ s}^{-1}$, $\nu = \sqrt{k_e/m}/2\pi = 22,5 \text{ Hz}$.

2. $y = A \sin \omega t$, $v = \omega A \cos \omega t$, $v_{\text{max}} = \omega A = F/\sqrt{k_e m} = 0,71 \text{ m/s}$, $E_{c \text{ max}} = m\omega^2 A^2/2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

3. $\Phi_{\text{max}} = BL(L + A)$, $\Phi_{\text{min}} = BL(L - A)$.

4. $\Phi = BL(L + y)$, $\varepsilon = \Delta\Phi/\Delta t = -BL\Delta y/\Delta t = -Blv = -\omega BLA \cos \omega t$, $\varepsilon_{\text{max}} = \omega BLA = 0,707 \cdot 10^{-3} \text{ V}$.

II.23. A.1. Fie x distanța dintre punctul de început al mișcării accelerate și verticala de cădere a pietrei. Dacă mecanicul frînează trenul pînă la oprire cu accelerația de frînare a_1 , atunci $x = v_0 t + a_1 t^2/2$ (1) și $0 = v_0 + a_1 t$ (2). Dacă trenul continuă mișcarea uniformă, $l + x = v_0 t$ (3). Înlocuind $t = -v_0/a_1$ în (1) și (3) obținem $x = -v_0^2/2a_1$, $l + x = -v_0^2/a_1$, de unde $x = l = 100 \text{ m}$.

2. În cazul mișcării cu accelerația a avem $l + x + d = v_0 t + at^2/2$ (4). Din (3) și (4) se obține $t = 10 \text{ s}$, $a = 2d/t_0^2 = 0,4 \text{ m/s}^2$.

3. Fie H înălțimea de la care cade piatra, t_c timpul de cădere ($t_c \geq t$), t_1 timpul în care trenul parcurge distanța x , adică $x = v_0 t_1 + at_1^2/2$ (5) și fie $t_2 = t - t_1$. Înălțimea la care se află piatra în momentul trecerii locomotivei este $\Delta H = [gt_c^2 - g(t_c - t_2)^2]/2 \Rightarrow \Delta H = g(t - t_1)(2t_c - t - t_1)/2$ (6). Din (5) se obține $t_1 = 10(\sqrt{30} - 5)$, care înlocuit în (6) conduce la $\Delta H = 50(6 - \sqrt{30})(2t_c - 60 + 10\sqrt{30})$ cu $t_c \geq t = 10 \text{ s}$. În cazul $t_c = t = 10 \text{ s}$, $\Delta H = 386 \text{ m}$.

B. Se descompune G în două forțe paralele și de același sens F_A și F_B , de-a lungul celor două fire. Avem $F_A x_A = F_B x_B$ (1) cu $x_A + x_B = l$ și $F_A + F_B = G$.

1. Din $F_A/S_A = F_B/S_B$ și (1) se obține $x_A S_A = x_B S_B$, de unde $x_A = l S_B/(S_A + S_B) = 0,7 \text{ m}$, $x_B = 0,35 \text{ m}$.

2. Din $\Delta l_A/l_0 = \Delta l_B/l_0$, adică $F_A/E_A S_A = F_B/E_B S_B$ și (1) se obține $E_A S_A x_A = E_B S_B x_B$, de unde $x_A = E_B S_B l/(E_A S_A + E_B S_B) = 0,6 \text{ m}$, $x_B = 0,45 \text{ m}$.

C.1. Ecuațiile lui Kirchhoff: $I = I_1 + I_2$, $I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$, $\mathcal{E} = R_1 I_1 + r I$, conduc la $I = [\mathcal{E}(R_1 + R_2)]/(r R_1 + r R_2 + R_1 R_2)$, $I_1 = \mathcal{E} R_2/(r R_1 + r R_2 + R_1 R_2)$, $I_2 = \mathcal{E} R_1/(r R_1 + r R_2 + R_1 R_2)$.

2. $U_{ak} = R_1 I_1 / 2 - x R_2 I_2 / (1 + x)$, $Q(x) = C E R_1 R_2 (1 - x) / [2(r R_1 + r R_2 + R_1 R_2)(1 + x)]$.

3. Funcția $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = (1 - x)/(1 + x) = -1 + 2/(1 + x)$ ia valoarea maximă când $x = 0$ (cursorul se află la unul din capetele rezistenței R_2). Din condiția $Q(x) = Q_{\max}/2$ se obține $x = 1/3$.

4. $I = 2 \text{ A}$, $I_1 = 1,6 \text{ A}$, $I_2 = 0,4 \text{ A}$; $Q(x) = 16(1 - x)/(1 + x) \text{ } \mu\text{C}$.

II.24. A.1. Pe planul orizontal $x_1 = a_1 \Delta t_1^2 / 2$, $v_1 = a_1 \Delta t_1$, $a_1 = [F \cos \beta - \mu(mg - F \sin \beta)]/m = 2,82 \text{ m/s}^2$. Pe planul înclinat $x_2 = v_1 \Delta t_2 + a_2 \Delta t_2^2 / 2$, $a_2 = [F \cos \beta - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) - mg \sin \alpha]/m = 0,87 \text{ m/s}^2$, $x = x_1 + x_2 = 60,32 \text{ m}$.

2. $v_1 = 11,28 \text{ m/s}$, $v_2 = v_1 + a_2 \Delta t_2 = 13,89 \text{ m/s}$.

3. $x_3 = -v_2^2 / 2a_3$, $a_3 = -g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = -3,96 \text{ m/s}^2$, $x_3 = 24,36 \text{ m}$. După oprire corpul coboară cu $a_4 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 0,04 \text{ m/s}^2$, apoi se deplasează pe planul orizontal cu $a_5 = -\mu g$, oprindu-se la $x'_1 = -(x_2 + x_3)a_4/a_5 = 1,24 \text{ m}$.

4. $a_1 = 0 \Rightarrow F_1 = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta) = 4,15 \text{ N}$, $a_2 = 0 \Rightarrow F_2 = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) / (\cos \beta + \mu \sin \beta) = 8,21 \text{ N}$.

B.1. Din ecuația termică de stare a gazului ideal $p = nkT$ cu $n = N/V = N/Sh$ avem $pS = NkT/h$. Dar $pS = F = kh$ și $3NkT/2 = E_c$. Se obține $h_1 = h\sqrt{E_c/E_c} = 40 \text{ cm}$.

2. $E_{p1}/E_p = (h_1/h)^2 = 4$.

3. Când gazul umple întreg cilindrul la temperatura T , presiunea este $p = NkT/V$. Prin încălzirea unei jumătăți de cilindru o parte din moleculele de gaz trec în jumătatea neîncălzită, menținându-se egalitatea presiunilor în cele două jumătăți de cilindru. La $T' = 3T$ presiunea în jumătatea încălzită a cilindrului este $p' = 2N_1 kT'/V$, iar în jumătatea aflată la temperatura T presiunea este: $p' = 2N_2 kT/V$ cu $N_1 + N_2 = N$. Se obține $p'/p = 2T'/(T + T') = 1,5$.

4. Nu; pentru $T' \rightarrow \infty$, $p'/p \rightarrow 2$.

C.1. La legarea în serie $R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 22 \text{ } \Omega$, $I = E/(R_e + r) = 1 \text{ A}$. La legarea în paralel se aplică legile lui Kirchhoff; se obține $I = 6 \text{ A}$, $I_1 = 3 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$.

2. Curentul maxim care poate fi măsurat cu ampermetrul fără șunt este $I_A = 0,2 \text{ A}$, iar curentul maxim de măsurat este $I = 6 \text{ A}$. Se obține $R_s = R_A I_A / (I - I_A) = 3,45 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega$.

3. $U = E - rI$, $U_s = 22 \text{ V}$, $U_p = 12 \text{ V}$.

4. $U_s = I_A(R_A + R_s)$ de unde $R_s = 109,9 \text{ } \Omega$.

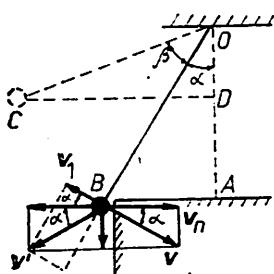


Fig. II.25.A

II.25. A.1. Se consideră că nivelul zero pentru energia potențială este planul aflat la distanța l sub punctul de susținere O (fig. II.25.A) $E_{pB} = mg(l - AO) = mg l(1 - \cos \alpha) = 0,054 \text{ J}$, $E_{cB} = mgl - E_{pB} = mgl \cos \alpha = 0,346 \text{ J}$.

2. $E_{cB} = mv^2/2 = mgl \cos \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gl \cos \alpha}$, $T = mg \cos \alpha + mv^2/l = 3 mg \cos \alpha = 1,3 \text{ N}$.

3. Ciocnirea perfect elastică schimbă sensul componentei normale a vitezei bilei, lăsând neschimbată componenta paralelă cu peretele. Viteza

după ciocnire v' se descompune într-o componentă de-a lungul firului și o componentă perpendiculară pe direcția firului care determină mișcarea bilei pînă în punctul de oprire C . Avem $v_1 = v \cos 2\alpha$. Aplicînd legea conservării energiei mecanice, după ciocnire, pentru punctele B și C se obține $AD = (v^2 \cos^2 2\alpha)/2g = l \cos \alpha \cos^2 2\alpha$.

B.1. În procesul $1 \rightarrow 2$, $p = \text{const.}$ T adică $V = \text{const.}$; în procesul $2 \rightarrow 3$, $p = \text{const.}$, iar în procesul $3 \rightarrow 1$, din $T = ap^2$ și $pV = \nu RT$, rezultă $V = a\nu R p$. Cele trei stări sînt caracterizate prin parametrii (p_1, V_1, T_1) , (p_2, V_2, T_2) , (p_3, V_3, T_3) cu condițiile $p_2 = p_3$, $T_1/T_3 = (p_1/p_3)^2$, sau, înlocuind $p_2 = 2p_1$, $T_1 = 100 \text{ K}$, se obține $T_2 = T_1 p_2/p_1 = 200 \text{ K}$, $T_3 = T_1 (p_2/p_1)^2 = 400 \text{ K}$ (fig. II.25.B). Căldura primită este $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \nu C_v (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2)$ care, împreună cu relația lui Mayer $C_p = C_v + R$, ne dă $C_v = [Q_1 - \nu R (T_3 - T_2)] / \nu (T_3 - T_1) = 20,78 \text{ kJ/kmol} \cdot \text{K}$.

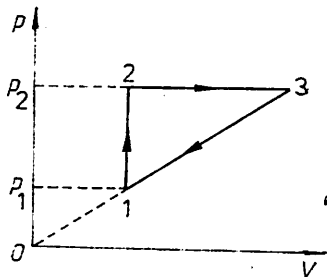


Fig. II.25.B

$$2. L = Q_1 - Q_{31} \Rightarrow (V_3 - V_2)(p_2 - p_1)/2 = -Q_1 - \nu C (T_3 - T_1) \Rightarrow C = 24,94 \text{ kJ/kmol} \cdot \text{K}.$$

$$3. \eta = L/Q_1 = 1 - Q_{31}/Q_1 = 5\%.$$

C.1. La echilibru forța de atracție dintre armăturile condensatorului C_1 este egală cu forța elastică: $QU_1/2d = k(d_0 - d) \Rightarrow C_1 U_1^2/2d = k(d_0 - d) \Rightarrow U_1 = d/2k(d_0 - d)/\epsilon_0 S = 100 \text{ V}$.

$$2. Q = C_1 U_1 = C_0 U_0, \text{ unde } C_1 = \epsilon_0 S/d = 88,6 \text{ pF} \Rightarrow U_0 = C_1 U_1/C_0 = 88,6 \text{ mV}.$$

3. Se aplică legea lui Kirchhoff pe circuitul surselor: $E_1 + E_2 = I(r + r) \Rightarrow I = (E_1 + E_2)/2r$. Tensiunea la bornele lui E_2 este $\bar{U} = E_2 - rI = (E_2 - E_1)/2$; dar $U = U_1 + U_0$, astfel că $E_2 - E_1 = 2(U_1 + U_0) = 200 \text{ V}$.

4. $C_1' U_1' = C_0 U_0'$ și $U_1' = (E_2 - E_1)/2 - U_0' \Rightarrow U_1' = 100 \text{ V}$, $C_1' = 133 \text{ pF}$. Noua distanță dintre armături verifică relația $C_1' U_1'^2/2d' = k(d_0 - d')$, adică $d' = 0,94 \text{ mm}$; $1/C_1' = g/\epsilon_0 \epsilon_r S + (d' - g)/\epsilon_0 S \Rightarrow \epsilon_r = C_1' g / [\epsilon_0 S - (d' - g)C_1'] = 2,21$.

II.26. A.1. La legarea în paralel $k_e = k_1 + k_2$, iar la legarea în serie $1/k_e = 1/k_1 + 1/k_2$.

$$2. v_2/v_1 = \sqrt{2}.$$

B. $\nu_1 = m_1/\mu_1$, $m_2 = 2m_1$, $\mu_2 = 2\mu_1 \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$; $pV_1 = (\nu_1 + \nu_2)RT_1 \Rightarrow \nu_1 = \nu_2 = pV_1/2RT_1$, $Q = (\nu_1 C_{1p} + \nu_2 C_{2p})(T_2 - T_1)$, $C_p = C_v + R \Rightarrow Q = 3pV_1 = 300 \text{ J}$.

C.1. Sarcina pe fiecare armătură a condensatoarelor este $Q = EC_1 C_2 : (C_1 + C_2)$, astfel că $U_{C1} = Q/C_1 = EC_2/(C_1 + C_2)$. Pe de altă parte $U_B = ER_1/(R_1 + R_2)$. Deci $V_A - V_B = E[R_1/(R_1 + R_2) - C_2/(C_1 + C_2)]$.
2. Nu.

II.27. A.1. $mg = A(k_1 + k_2)$, $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)} \Rightarrow A = gT^2/4\pi^2$.

2. Se descompune $G = mg$ în două componente F_1, F_2 , de-a lungul verticalelor corespunzătoare celor două resorturi: $F_1 + F_2 = G$, $F_1/F_2 = l_2/l_1 \Rightarrow F_1 = G/(1 + e)$, $F_2 = Ge/(1 + e)$ și $F_1/k_1 = F_2/k_2$ (bara rămîne

orizontală). Se obține $k_2 = ek_1$, iar din $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$ rezultă $k_1 = 4\pi^2 m/[T^2(1 + e)]$. Prin urmare $T_1 = 2\pi\sqrt{m_1/k_1} = T\sqrt{2(1 + e)}$, $T_2 = T\sqrt{3(e + 1)/e}$.

$$\text{B.1. } \Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu C_v(aV_2 - bV_2^2 - aV_1 + bV_1^2) = \nu C_v \cdot [a(n-1)V_1 - b(n^2-1)V_1^2] = \nu C_v(n-1)V_1[a - b(n+1)V_1].$$

Din $C_p/C_v = \gamma$ și $C_p = C_v + R$ se obține $C_v = R/(\gamma - 1)$, iar din $p_1V_1 = \nu RT_1$ se obține $V_1 = \nu RT_1/p_1$, astfel că :

$$\Delta U = \frac{\nu^2(n-1)}{\gamma-1} \cdot \frac{R^2 T_1}{p_1} \left[a - b(n+1) \frac{\nu R T_1}{p_1} \right].$$

2. Din $T_1 = aV_1 - bV_1^2$ și $p_1V_1 = \nu RT_1$, eliminând T_1 se obține $bV_1 = a - p_1/\nu R$ (1). Condiția $U_2 = U_1 \Leftrightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow T_2 = T_1$, adică $anV_1 - bn^2V_1^2 = aV_1 - bV_1^2 \Rightarrow a = (n+1)bV_1$ (2). Din (1) și (2) se obține $a = (n+1)p_1/\nu R$ (3) și $b = p_1^2/\nu^2 R^2 T_1$ (4).

3. Relația (1) scrisă sub forma $p = a\nu R - b\nu R V$ (5) arată că în diagrama $p - V$ procesul de destindere a gazului are loc după o dreaptă. Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii este egal cu aria trapezului format de axa absciselor, dreapta (5) și ordonatele corespunzătoare celor două stări, adică $L = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = [2a\nu R - b\nu R(V_1 + V_2)](n-1)V_1/2 = [a - b(n+1)V_1/2](n-1)\nu R V_1$.

$$\text{C.1. } L = \mu N^2 S/l = 0,2 \text{ } \mu\text{H}.$$

$$2. B = \mu NI/l = 0,314 \text{ mT}.$$

3. $\Phi = B \cdot \pi r^2 \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n})$, unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei la planul spirei. Dacă ω este viteza unghiulară de rotație a spirei, atunci $\cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = \cos \omega t$. Avem $e = -\Delta\Phi/\Delta t$ cu $\Delta\Phi = \pi r^2 B [\cos \omega(t + \Delta t) - \cos \omega t] = -2\pi r^2 B \sin \omega(t + \Delta t/2) \sin \omega \Delta t/2 \simeq -\pi r^2 B \omega \Delta t \sin \omega t$, astfel că $e = \pi r^2 \omega B \sin \omega t$ și $E_m = \pi r^2 \omega B = 2\pi^2 r^2 \nu B = 6,2 \text{ mV}$

$$4. \text{tg } \varphi = \omega L/R = 0,01256.$$

II.28. A. Corpul se deplasează pe buclă dacă în punctul C avem $F_{cf} \geq mg$, adică $mv_c^2/R \geq mg$ (1). Pentru punctul C legea conservării energiei mecanice se scrie : $mgh = mg \cdot 2R + mv_c^2/2$ (2). Din (1) și (2) rezultă $h \geq 5R/2$. Alegem un sistem de coordonate xO_1y în planul buclei cu axa O_1x orizontală, trecind prin O și axa O_1y verticală, trecind prin A. Viteza corpului în A se obține din relația $mgh = mgR(1 + \cos \alpha) + mv_A^2/2$ cu $h = 5R/2$. Rezultă $v_A^2 = Rg(3 - 2 \cos \alpha)$ (3). Această viteză se descompune în două componente : una orizontală $v_{Ax} = v_A \cos \alpha$ și una verticală $v_{Ay} = v_A \sin \alpha$. Mișcarea pe orizontală este uniformă, astfel că $t_{AB} = AB/v_{Ax} = (2R/v_A) \text{tg } \alpha$. Mișcarea pe verticală are loc în câmpul gravitațional, timpul de urcare fiind $t_u = v_{Ay}/g$. Corpul va intra pe buclă în B dacă $t_{AB} = 2t_u$, adică $(2R/v_A) \text{tg } \alpha = (2v_A/g) \sin \alpha$. Se obțin ecuațiile $\sin \alpha = 0$ (4) și $v_A^2 \cos \alpha = Rg$ (5). Ecuația (4) are soluția $\alpha = 0$, iar din (5) și (3) se obține $2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$ și $\cos \alpha = 1/2$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

B. Din grafic reiese că p este o funcție liniară de V , adică $p = aV + b$ cu $p_1 = aV_1 + b$ și $p_2 = aV_2 + b \Rightarrow c = (p_1 - p_2)/(V_1 - V_2)$, $b = (p_2V_1 - p_1V_2)/(V_1 - V_2)$. La temperatura maximă atinsă de gaz, izoterma corespunzătoare este tangentă dreptei $p = aV + b$, adică $(aV + b)V = mRT_{\max}/\mu$. Această ecuație de gradul doi în V trebuie să admită rădăcini egale (pentru satisfacerea condiției de tangentă). Rezultă $\Delta =$

$$= b^2 + 4amRT_{\max}/\mu = 0, \text{ de unde } T_{\max} = -\mu b^2/4aRm = [\mu(p_2V_1 - p_1V_2)^2]: \\ : [(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) \cdot 4mR] = 737 \text{ K.}$$

C.1. $\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = -45^\circ$.

2. $\operatorname{tg} \varphi = (X_L - X_C)/R = \pm 1 \Rightarrow \omega_1 = 5000 \text{ s}^{-1}, f_1 = 796 \text{ Hz}, \omega_2 = 2500 \text{ s}^{-1}, f_2 = 398 \text{ Hz}$.

3. Circuitul este inductiv pentru $f_1(> f_{\text{rez}})$ și capacitiv pentru $f_2(< f_{\text{rez}})$.

II.29. A.1. $A_1 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \omega = 1000 \pi, E_e = [(m\omega^2 A_1^2)/2] \cos^2 \omega t = 0,71 \cos^2 1000 \pi t \text{ (J)}; E_p = 0,71 \sin^2 1000 \pi t \text{ (J)}; E_i = m\omega^2 A_1^2/2 = 0,71 \text{ J}$.

2. $2\pi\Delta x/\lambda = \Delta\varphi \Rightarrow \lambda = 8 \text{ m}, \nu = \omega/2\pi = 500 \text{ Hz}, v = \lambda\nu = 4000 \text{ m/s}$.

3. $v = \sqrt{E/\rho} \Rightarrow E = \rho v^2 = 4,16 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

4. $u = A \sin(\omega t + \varphi)$, unde $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 1,2\sqrt{2} \text{ cm}$, cu $A_1 = A_2 = 1,2 \text{ cm}$ și $\varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4$ și $\operatorname{tg} \varphi = [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2] : [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2] = 0$, adică $\varphi = 0$.

B.1. Temperaturile extreme atinse în timpul ciclului sint determinate de izotermele tangente la cerc (punctele A, A₁ din figura II.29.B). Pe porțiunea A — 1 — A₁ gazul se încălzește, iar pe porțiunea A₁ — 2 — A gazul se răcește.

2. Schimbul de căldură este zero pentru punctele în care adiabata este tangentă la graficul procesului (punctele B și B₁). Pe porțiunea B — 1 — B₁ gazul primește căldură, iar pe porțiunea B₁ — 2 — B gazul cedează căldură.

3. Gazul efectuează lucru mecanic pe porțiunea C — 1 — C₁ când se dilată și asupra gazului se efectuează lucru mecanic pe porțiunea C₁ — 2 — C când este comprimat. Căldură specifică negativă avem pe porțiunea AB (gazul se încălzește și cedează căldură) și pe porțiunea A₁B₁ (gazul se răcește și primește căldură).

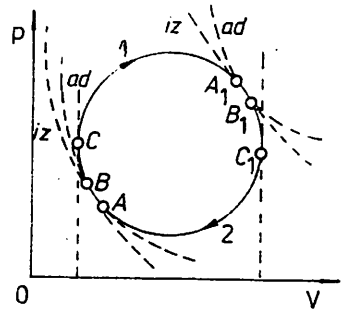


Fig. II.29.B

C.1. Folosind ecuațiile lui Kirchhoff se obține $R = [R_2^2(R_1 + R_b) - R_1^2(R_2 + R_b)] : (R_1^2 + R_1R_2) = 176 \Omega$.

2. $I_b = ER_1/[R_1R_2 + R_b(R_1 + R_2)] = 0,273 \text{ A}, B = \mu NI_b/l = 1,7 \text{ mT}$.

II.30. A.1. $a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha); v_1 = \sqrt{2sa_1} = \sqrt{gH(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 9 \text{ m/s}$.

2. Datorită forței Arhimede, greutatea aparentă a corpului în ulei este $G_a = mg(1 - 1/d)$, astfel că $a_2 = g(1 - 1/d) \sin \alpha = 1,18 \text{ m/s}^2$.

3. $v_2 = v_1 + a_2 t_2, H/2 \sin \alpha = v_1 t_2 + a_2 t_2^2/2 \Rightarrow H/\sin \alpha = (v_2^2 - v_1^2)/a_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{a_2 H/\sin \alpha + v_1^2} = \sqrt{gH(2 - \mu \operatorname{ctg} \alpha - 1/d)} = 9,9 \text{ m/s}$.

4. $t_1 + t_2 = v_1/a_1 + (v_2 - v_1)/a_2 = 2,34 \text{ s}$.

B.1. $Q_i = Q_a/\eta_1 = 2[m_1c_a(\theta - t_0) + m_1\lambda_v]/\eta_1 = 146,86 \cdot 10^6 \text{ J}$.

2. $Q_u = RI^2 t \eta_2 \Rightarrow I = \sqrt{Q_u/RI t \eta_2} = 8,245 \text{ A}$.

3. $m_2\lambda_v + m_2c_a(\theta - t_0) = m_3\lambda_v \Rightarrow m_3 = m_2[\lambda_v + c_a(\theta - t_0)]/\lambda_v = 18,668 \text{ kg}$.

C.1. Ecuațiile lui Kirchhoff conduc la sistemul: $I_1 + I_2 = I$, $IR + n_1 r I_1 = n_1 E$, $IR + n_2 r I_2 = n_2 E$, de unde $I_1 = E[n_1 n_2 r + R(n_1 - n_2)] : r[n_1 n_2 r + R(n_1 + n_2)] = 10/3$ A, $I_2 = E[n_1 n_2 r - R(n_1 - n_2)] : r[n_1 n_2 r + R(n_1 + n_2)] = -2/3$ A, $I = 2En_1 n_2 : [n_1 n_2 r + R(n_1 + n_2)] = 8/3$ A.

2. $I_2 = 0 \Rightarrow R = n_1 n_2 r / (n_1 - n_2) = 8/3 \Omega$.

3. $P = RI^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R[(2/P) \cdot (En_1 n_2 / (n_1 + n_2))^2 - n_1 n_2 r / (n_1 + n_2)] + (n_1 n_2 r / (n_1 + n_2))^2 = 0$ (1). Funcția $f(R) = aR^2 + bR + c$ ia o valoare extremă pentru $R_M = -b/2a$; avem $R_M = [(2/P_{\max}) \cdot (En_1 n_2 / (n_1 + n_2))^2 - n_1 n_2 r / (n_1 + n_2)]$ (2). Înlocuind (2) în (1) se obține $P_{\max} = E^2 n_1 n_2 / (n_1 + n_2) r = 800/13$ W, $R_M = n_1 n_2 r / (n_1 + n_2) = 8/13 \Omega$.

II.31. A. Se consideră seringă ca o conductă orizontală cu secțiune variabilă. Ecuația de continuitate $S_1 v_1 = S_2 v_2$ și legea Bernoulli $F/S_1 + p_0 + \rho v_1^2/2 = p_0 + \rho v_2^2/2$ conduc la $v_1 = \sqrt{2FS_2^2/S_1 \rho (S_1^2 - S_2^2)}$, de unde $t = l/v_1 = l/\sqrt{S_1 \rho (S_1^2 - S_2^2)/2FS_2^2} \approx (S_1 l/S_2) \sqrt{\rho S_1/2F} = 5/3$ s, deoarece $S_1 \gg S_2$ și $(S_1/S_2)^2 - 1 \approx (S_1/S_2)^2$.

B. 1. $p_1 V_1 = m_1 RT/\mu$, $p_2 V_2 = m_2 RT/\mu \Rightarrow m = m_1 + m_2 = \mu(p_1 V_1 + p_2 V_2)/RT = 0,031448$ kg. Presiunea în recipiente după deschiderea robinetului este $p = mRT/\mu(V_1 + V_2) = (p_1 V_1 + p_2 V_2)/(V_1 + V_2) = 7 \cdot 10^5/3$ N/m². Prin urmare, $pV_1 = m_1 RT/\mu$, $pV_2 = m_2 RT/\mu$, de unde $m_1' = pV_1\mu/RT = mV_1/(V_1 + V_2) = 0,010483$ kg, $m_2' = m - m_1' = 0,020965$ kg.

2. Presiunea în recipientul 2 rămâne $p = 7 \cdot 10^5/3$ N/m², iar în recipientul 1 gazul suferă o transformare izocoră; $p/T = p_1'/T_1 \Rightarrow p_1' = pT_1/T = 28 \cdot 10^5/9$ N/m².

3. $v_T = \sqrt{3RT/\mu} = 516,82$ m/s, $n_2 = N_A m_2'/\mu V_2 = 56,34 \cdot 10^{24}$ molecule/m³.

C.1. $U = U_1/\cos \varphi = 220$ V.

2. Din $P = U_1 I$ și $I = U/Z$ se obține $Z = UU_1/P = 1210/3 \Omega$.

3. $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ cu $R = U_1^2/P = 605/3 \Omega$. Se obține $X_L = 605\sqrt{3}/3 \Omega$.

4. Ecuațiile lui Kirchhoff conduc la sistemul: $I_A + I_s = I$, $I_A R_A = I_s R_s$, de unde $R_s = I_A R_A / (I - I_A)$. Înlocuind $I_A = 0,1$ A, $I = 1$ A, $R_A = 0,9 \Omega$ se obține $R_s = 0,1 \Omega$.

II.32. A.1. Sistemul se pune în mișcare accelerată (bilele 1, 2, 3 coboară iar bilele 4, 5 urcă): $5ma_1 = 3mg - 2mg \Rightarrow a_1 = g/5 = 2$ m/s². Pînă la momentul desprinderii, bila 1 a coborît cu $x_1 = a_1 t_1^2/2 = 4$ m, are viteza $v_{01} = a_1 t_1 = 4$ m/s. După desprindere, bila 1 atinge solul după un timp t_2 dat de $h - x_1 = v_{01} t_2 + gt_2^2/2$; se obține $t_2 = 1$ s.

2. După desprinderea bilei 1 sistemul de bile 2, 3 continuă să coboare cu viteza constantă $v_{01} = 4$ m/s. În momentul desprinderii bilei 2, sistemul de bile 2, 3 se afla la înălțimea $h_2 = h - x_1 - v_{01} t_3 = 5$ m de sol. După desprindere, bila 2 va atinge solul după un timp t_4 dat de $h_2 = v_{01} t_4 + gt_4^2/2$, adică $t_4 = (-2 + \sqrt{29})/5$ s.

3. După desprinderea bilei 2 sistemul va căpăta o mișcare accelerată. Din $3ma_2 = 2mg - mg$ se obține $a_2 = g/3 = 10/3$ m/s². Bila 3 va continua să coboare încetinit cu accelerația $-a_2$ apoi, după ce viteza se anulează, va urca cu accelerația $+a_2$. Avem ecuațiile: $v_{01} - a_2 t_5 = 0 \Rightarrow t_5 = 1,2$ s și $x_3 = v_{01}^2/2a_2 = 2,4$ m. După oprire, bila 3 are de urcat $\Delta h = x_1 + v_{01} t_3 + x_3 = 10,4$ m cu accelerația a_2 , fără viteză inițială.

$\Delta h = a_2 t_6^2 / 2 \Rightarrow t_6 \approx 2,5$ s. Prin urmare, bila 3 ajunge la înălțimea h după un timp $t_5 + t_6 = 3,7$ s de la desprinderea bilei 2.

B.1. $v_T = \sqrt{3RT/\mu} = 507,7$ m/s.

2. $p'_i(V_1 + \Delta V) = \nu R(T + 3)$, $p'_i(V_1 - \Delta V) = \nu R(T - 3) \Rightarrow (V_1 + \Delta V)/(V_1 - \Delta V) = (T + 3)/(T - 3) \Rightarrow \Delta V = 3V_1/T = 3,14$ cm³, $\Delta x = 4\Delta V/\pi d^2 = 25$ cm.

3. $\Delta U = U' - U = U'_1 + U'_2 - U_1 - U_2 = (3/2)\nu R(T + 3 + T - 3 - T - T) = 0$.

C. Potrivit figurii II.32.C variația în timp a fluxului este: $\Phi(t) = -1,2$ mWb pentru $t \in [0, 1/30] \cup [5/30, 6/30]$, $\Phi(t) = 1,2$ mWb pentru $t \in (2/30, 4/30)$, $\Phi(t) = 72t - 3,6$ mWb pentru $t \in [1/30, 2/30]$ și $\Phi(t) = -72t + 10,8$ mWb pentru $t \in [4/30, 5/30]$. Din $e = -\Delta\Phi/\Delta t$ avem: $e = 0$ pentru $t \in [0, 1/30] \cup (2/30, 4/30) \cup [5/30, 6/30]$ deoarece fluxul magnetic este constant și $\Delta\Phi = 0$; pentru $t \in [1/30, 2/30]$, $e = -[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)]/(t_2 - t_1) = -72$ mV, iar pentru $t \in [4/30, 5/30]$, $e = -[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)]/(t_2 - t_1) = 72$ mV (fig. II.32.C).

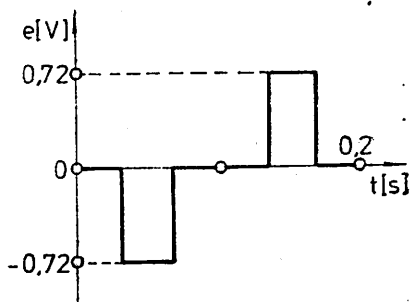


Fig. II.32.C

II.33. A.1. $t_1 = d/(v_{01} + v_{02}) = 0,4$ s, $h_1 = h - gt_1^2/2 = 4,2$ m.

2. $m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x$, cu $v_{1x} = v_{01}$, $v_{2x} = v_{02}$ și $m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2) v_y$, cu $v_{1y} = v_{2y} = gt_1$. Se obține $v_x = 0$, $v_y = gt_1 = 4$ m/s.

3. $\Delta Q = -(E_{cf} - E_{cl}) = -[(m_1 + m_2)v^2/2 - (m_1 v_{1y}^2/2 + m_2 v_{2y}^2/2)]$ cu $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (gt_1)^2$, $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{01}^2 + (gt_1)^2$, $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = v_{02}^2 + (gt_1)^2$. Se obține $\Delta Q = (m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2)/2 = 100$ J = $(m_1 + m_2) c \Delta T$, de unde $\Delta T = 0,05$ °C.

B.1. (1 $\rightarrow$ 2): $V_1/T_1 = V_2/T_2$ (1); (2 $\rightarrow$ 3): $T_2 V_2^{-1} = T_1 (V_1/8)^{\gamma-1}$, de unde $V_2^{\gamma} = V_1^{\gamma}/8^{\gamma-1} \Rightarrow V_2 = V_1/8^{(\gamma-1)/\gamma} \Rightarrow V_2 = V_1/2$ (2) și $L_{12} = -p_1(V_2 - V_1) = -p_1 V_1/2 = -25$ kJ.

2. $\eta = 1 - |Q_{ced}|/Q_{abs}$; $Q_{ced} = Q_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1) = -\nu(C_p + R)T_1/2 = -7p_1 V_1/4 = -87,5$ kJ [s-au folosit (1) și (2)]; $Q_{abs} = L_{31} = \nu R T_1 \ln(V_1/V_3) = p_1 V_1 \ln 2 = 3p_1 V_1 \ln 2 = 103 950$ J. Deci $\eta = 16450$ J, $Q_{abs} = Q_{31} = L_{31}$, astfel că $\eta = 15,8\%$.

3. $\Delta U_{123} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = \nu C_v(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) = 0$ sau $\Delta U_{123} = U_3 - U_1 = \Delta U_{31} = 0$, transformarea 3-1 fiind izotermă.

4. $v_T = \sqrt{3RT_2/\mu} = \sqrt{3p_1 V_1/2\mu\nu} = 500$ m/s.

C.1. $I_1 = U/\sqrt{1/R^2 + 1/X_L^2}$, $I_2 = U/X_L$, $I_3 = U(1/X_L - 1/X_C)$, $I_1 = 2I_2$, $I_3 = 4I_2/9 \Rightarrow I_2 = 22/3$ A, $I_1 = 44/3$ A, $I_3 = 88/27$ A, $R = 10\sqrt{3}$ Ω, $C = 58,9$ μF.

2. $I_R = U/R = 22/\sqrt{3}$ A, $\cos \varphi = U/I_1 R = \sqrt{3}/2$. Fie $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$; avem: $i_R = (\sqrt{2}U/R) \sin \omega t$, $i_L = (\sqrt{2}U/X_L) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, $i_C = (\sqrt{2}U/X_C) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

3. $X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 30\sqrt{5}$ Hz, cu $L = 3/10 \pi$ H.

11.34. A.1. $s_1 = (1/2)gt^2 \sin \alpha$, $s_2 = (1/2)gt^2 \sin \beta$, $2l = l \rightarrow s_2 - s_1 \Rightarrow t = \sqrt{2l/g(\sin \beta - \sin \alpha)} = 2 \text{ s}$.

2. $s_1 = (l \sin \alpha)/(\sin \beta - \sin \alpha) = 4\sqrt{5} \text{ m}$, $s_2 = (l \sin \beta)/(\sin \beta - \sin \alpha) = 8\sqrt{5} \text{ m}$.

Observație. Dacă $s_1 \leq l$, întinderea cablului are loc când corpul O_1 se află pe planul P_1 . Dacă $s_1 > l$, întinderea cablului are loc când ambele corpuri se află pe planul P_2 ; în acest caz $s_1 = (1/2)gt^2 \sin \beta \rightarrow t(1 - \sin \beta/\sin \alpha)\sqrt{2lg \sin \alpha} - l(1 - \sin \beta/\sin \alpha)$, $s_2 = (1/2)gt^2 \sin \beta$, $2l = l \rightarrow s_2 - s_1 \Rightarrow t = l \sin \beta/(\sin \beta - \sin \alpha)\sqrt{2lg \sin \alpha}$.

3. $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = [(m_1 \sin \alpha + m_2 \sin \beta)/(m_1 + m_2)]gt = 6\sqrt{5} \text{ m/s}$.

4. $vt_1 + (1/2)gt_1^2 \sin \beta = 4l \Rightarrow t_1 = 1,7 \text{ s}$; $vt_2 + (1/2)gt_2^2 \sin \beta = 2l \Rightarrow t_2 = 1 \text{ s}$.

B. $p = 4\sigma/R = 300 \text{ N/m}^2$.

O.1. $E_p(r_0) = q_1 q_2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r_0 = -0,25 \text{ mJ}$, $E_p(r_1 + r_2) = q_1 q_2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (r_1 + r_2) = -4,5 \text{ mJ}$.

2. $E_e(r_1 + r_2) = E_e - E_p(r_1 + r_2) = E_p(r_0) - E_p(r_1 + r_2) = 4,25 \text{ mJ}$.

3. $q'_1 = (q_1 + q_2)r_1/(r_1 + r_2) = 30 \text{ nC}$, $q'_2 = 45 \text{ nC}$.

4. $E'_p(r_1 + r_2) = q'_1 q'_2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r (r_1 + r_2) = 2,43 \text{ mJ}$, $E'_p(r_0) = q'_1 q'_2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r_0 = 0,135 \text{ mJ}$, $E'_e(r_0) = E'_e(r_1 + r_2) \rightarrow E'_e(r_1 + r_2) - E'_p(r_0) = 6,545 \text{ mJ}$.

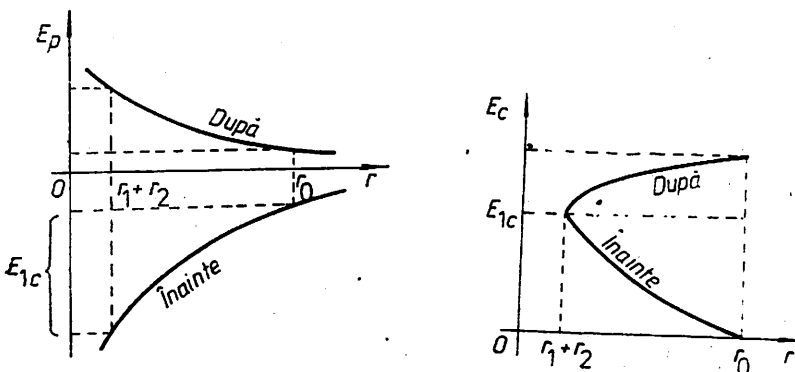


Fig. II.34.C

Din $E'_e(r_0) = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ și $m_1 v_1 = m_2 v_2$ se obține $v_1 = \sqrt{2E'_e(r_0)m_2/m_1(m_1 + m_2)} = 4,67 \text{ m/s}$, $v_2 = 2,33 \text{ m/s}$.

5. Fig. II.34.C.

11.35. A.1. $AB = a_1 t_1^2/2 = 10 \text{ m}$, $v_B = a_1 t_1 = 5 \text{ m/s}$; $BC = v_B t_2$; $CD = v_B t_3 + a_3 t_3^2/2$, $v_B + a_3 t_3 = 0$. Înlocuind $t_3 = -v_B/a_3 = 4 \text{ s}$, se obține $AD = AB + v_B t_2 - v_B^2/2a_3$, de unde $t_2 = 20 \text{ s}$.

2. $T_1 = M(g + a_1) = 9000 \text{ N}$, $T_2 = Mg = 8000 \text{ N}$, $T_3 = M(g + a_3) = 7000 \text{ N}$.

3. $v_1 = (1/2\pi)\sqrt{(g + a_1)/l} = 0,845 \text{ Hz}$, $v_2 = (1/2\pi)\sqrt{g/l} = 0,8 \text{ Hz}$, $v_3 = (1/2\pi)\sqrt{(g + a_3)/l} = 0,745 \text{ Hz}$.

4. $n = [v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3] = 22$, notația $[]$ reprezentînd partea întreagă.

B.1. Se consideră un sistem de coordonate Oxy cu originea O în centrul de masă al corpului 3 și axele în direcție orizontală (Ox), respectiv verticală (Oy). Sistemul fiind în echilibru, $T + G_2 + G_3 + qE = 0$, sau proiectând pe Ox și Oy și înlocuind $T = G_1$, se obține $G_1 \sin \beta = qE \sin \alpha$ (1), $G_1 \cos \beta + qE \cos \alpha = G_2 + G_3$ (2). Se scrie (2) sub forma $G_1 \cos \beta = -G_2 + G_3 - qE \cos \alpha$ (2'), se ridică la pătrat (1) și (2') și apoi prin adunare se obține $\cos \alpha = [(G_2 + G_3)^2 + (qE)^2 - G_1^2] / 2qE(G_2 + G_3) = 0,31$, de unde $\alpha = 72^\circ$. Analog $\cos \beta = [(G_2 + G_3)^2 + G_1^2 - (qE)^2] / 2G_1(G_2 + G_3) = 0,65 \Rightarrow \beta = 49,5^\circ$.

2. Dacă E este îndreptat vertical în sus, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ și sistemul se pune în mișcare accelerată, astfel că m_1 coboară cu a_1 dat de: $m_1 a_1 = -G_1 - T_1$, $(m_2 + m_3)a_1 = T_1 + qE - (G_2 + G_3)$, de unde $a_1 = [G_1 + qE - (G_2 + G_3)] / (m_1 + m_2 + m_3) = 4,74 \text{ m/s}^2$. Dacă E este îndreptat vertical în jos, $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ și sistemul se pune în mișcare accelerată astfel că $m_2 + m_3$ coboară cu accelerația a_2 dată de: $m_1 a_2 = T_1 - G_1$, $(m_2 + m_3)a_2 = G_2 + G_3 + qE - T_2$, de unde $a_2 = (G_2 + G_3 + qE - G_1) / (m_1 + m_2 + m_3) = 3,68 \text{ m/s}^2$.

C.1. $C_p = \mu C_p = 29,12 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ și relația R. Mayer $C_v + R = C_p$ conduce la $C_v = 20,81 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, de unde $c_v = 650,3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

2. În starea inițială, $p_0 = 1 \text{ atm}$ și $T_0 = 273 \text{ K}$. Pentru transformarea izocoră $p/T = p_0/T_0 = (p - p_0)/(T - T_0)$, de unde $p = p_0 + p_0 \Delta T / T_0 = 1,04 \text{ atm} = 105,04 \text{ kPa}$.

3. Din $v_1 C_p \Delta T = r_1 I_1^2 t$ și $v_2 C_v \Delta T = r_2 I_2^2 t$ se obține $C_p / C_v = -r_1 / r_2$ care, împreună cu $r_1 + r_2 = 10$, conduce la $r_1 = 10 C_p / (C_p + C_v) = 5,83 \Omega$, $r_2 = 4,17 \Omega$.

4. Din $1/R = 1/(r_1 + r_2) + 1/a$ se obține $a = 10 \Omega$ și deci $b = 4 \Omega$. Legile lui Kirchhoff conduc la sistemul $I_b = I_r + I_a$, $I_r(r_1 + r_2) - I_a a = 0$, $E = I_b r_1 + I_a a + I_b b$; se obține $I_b = 1 \text{ A}$, $I_a = I_r = 0,5 \text{ A}$.

5. $t = v_1 C_p \Delta T / r_1 I_1^2 = 199,8 \text{ s}$.

II.36. A.1. $m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \Rightarrow \sin \alpha_1 = m_2 / m_1 = 0,5$; $\alpha_1 = 30^\circ$.

2. $m_1 g \sin \alpha_2 + \mu m_1 g \cos \alpha_2 = m_2 g \Rightarrow \alpha_2 = 22^\circ$.

3. $m_1 g \sin \alpha_3 = \mu m_1 g \cos \alpha_3 + m_2 g \Rightarrow \alpha_3 = 35^\circ$.

4. $m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha_4 - \mu m_1 g \cos \alpha_4$, $m_2 a = m_2 g - T \Rightarrow \alpha_4 = 43^\circ$, $a = (m_2 g - m_1 g \sin \alpha_4 - \mu m_1 g \cos \alpha_4) / (m_1 + m_2)$.

5. $m_1 a' = m_1 g \sin \alpha_5 - T - \mu m_1 g \cos \alpha_5$, $m_2 a' = T - m_2 g \Rightarrow a' = -(m_1 g \sin \alpha_5 - m_2 g - \mu m_1 g \cos \alpha_5) / (m_1 + m_2)$. Înlocuind $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, se obține o ecuație trigonometrică în $\sin \alpha$, care va admite soluții dacă $\sin \alpha < 1$.

6. $T = m_2(g - a) = m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) / (m_1 + m_2)$. Valoarea maximă pentru T se obține din condiția $dT/d\alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = 1/\mu$, $T_{\max} = [m_1 m_2 g / (m_1 + m_2)] (1 + 2\mu/\sqrt{1 + \mu^2}) = 3,7 \text{ N}$.

B.1. Din $L = p \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$. Dar $\Delta V = \Delta V_{\text{gheată}} + \Delta V_{\text{apă}}$, unde $\Delta V_g = V_{0g} \cdot (0 - t) = m \gamma (0 - t) / \rho$, $\Delta V_a = \alpha m v \Rightarrow \alpha = \gamma t / v \rho = 5 \cdot 10^{-4}$.

2. $Q/m = c_p(0 - t) + \alpha \lambda_v = 10,667 \text{ kJ}$.

C.1. Tensiunea superficială creează în interiorul bulei o presiune dată de relația $\pi r^2 p = 2\pi r \sigma$, adică $p = 2\sigma/r$. Presiunea totală la care este supusă bula pe fundul apei este $p = p_0 + \rho gh + 2\sigma/r_0$, iar la suprafața apei $p' = p_0 + 2\sigma/r$. Gazul din interiorul bulei suferă o transformare izotermă: $pV = p'V'$, cu $V = 4\pi r_0^3/3$, $V' = 4\pi r^3/3$. Se obține $h = -[p_0(r^3 - r_0^3) + 2\sigma(r^2 - r_0^2)] / \rho g r_0^3 = 3,3 \text{ m}$.

2. Gazul din interiorul bulei suferă o transformare generală: $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$. Tensiunea superficială creează în interiorul bulei o presiune suplimentară dată de $p = F/S = 2\sigma l/S = 8\sigma/d$, unde $S = \pi d^2/4$ și $F = 2\sigma \pi d$, deoarece pelicula are două fețe. Rezultă că presiunile din interiorul bulei sînt: $p_1 = p_0 + 8\sigma_1/d_1$, $p_2 = p_0 + 8\sigma_2/d_2$. Înlocuind în ecuația Clapeyron-Mendeleev se obține $\sigma_2 = 0,047 \text{ N/m}$.

II.37. A.1. La echilibru avem: $T_1 + T_2 = G$ (1), $T_1 x = T_2(l - x)$ (2), $T_1 = k_1 \Delta l_1$, $T_2 = k_2 \Delta l_2$ (3) și $\Delta l_1 - \Delta l_2 = l \sin \alpha$ (4). Din (1) - (4) se obține $T_1 = (G + k_2 l \sin \alpha) k_1 / (k_1 + k_2) = 686 \text{ N}$, $T_2 = G - T_1 = 294 \text{ N}$, $x = T_2 l / (T_1 + T_2) = 0,30 \text{ m}$.

2. Corpul nu alunecă pe scindură dacă $G_t \leq F_t$, adică $mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha$, $\mu_{\min} = \tan \alpha = \sqrt{3}/3 = 0,576$.

3. Pentru ca scindura să fie orizontală este necesar ca $\Delta l_1 = \Delta l_2$. Se obține $T'_1 = k_1 G / (k_1 + k_2) = 392 \text{ N}$, $T'_2 = 588 \text{ N}$, $y = T'_2 l / (T'_1 + T'_2) = 0,6 \text{ m}$.

4. Din relațiile (3) și (4) rezultă $\sin \alpha = (1/l)(T_1/k_1 - T_2/k_2)$, care împreună cu (1) și (2) conduc la $\sin \alpha = (G/l^2)[(l - x)/k_1 - x/k_2] = 1 - (5/3)x$. Se constată că α scade cînd x crește și se anulează pentru $x = 3/5 = 0,6 \text{ m}$. Dacă x crește în continuare scindura se apleacă în partea capătului B.

B.1. Randamentul presei hidraulice este: $\eta = I_u/L_c = F_2 H / P_c t = F_2 n h_2 / P_c t$, unde h_2 este deplasarea pistonului mare la o apăsare a pistonului mic. Lichidul fiind incompresibil, $S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow h_2/h_1 = (d_1/d_2)^2$. Rezultă $P_c = F_2 n h_1 d_1^2 / \eta t d_2^2 = 1875 \text{ W}$.

2. Folosind $S_1 h_1 = S_2 h_2$ se obține $H = n h_1 d_1^2 / d_2^2 = 0,3 \text{ m}$.

3. $F_1 = F_2 d_1^2 / d_2^2 = 4000 \text{ N}$.

C.1. $E_1 = E/n = 2 \text{ V}$; $r_1 = r/n = 0,1 \Omega$.

2. $R_2 = E/I - r - R_1 = 1 \Omega$.

3. $m = KIt = 23 \text{ g}$.

4. $t_1 = [m_2(\lambda + c\theta) - m_1 c(\theta_1 - \theta)] : R_1 I^2 = 89 \text{ min } 54 \text{ s}$.

5. $R_s = R_A : (I/I_A - 1) = 0,2 \Omega$.

II.38. A. Condițiile de echilibru se scriu: pentru forțe: $R_x + T \cos \alpha + F \cos \beta = 0$, $R_y - G + T \sin \alpha - F \sin \beta = 0$; pentru momente: $T \cdot AD \sin \alpha - G \cdot AC - F \cdot AB \sin \beta = 0$. Se obține $T = 422 \text{ N}$, $R_x = -398 \text{ N}$, $R_y = -24 \text{ N}$.

B.1. $h = (p_0/\rho g)/(V_1/Sl - 1) = 52,9 \text{ cm}$.

2. $Q = \mu p_1 c_p Sl/R = 18,5 \text{ J}$.

3. $L = p_1 Sl = 5,29 \text{ J}$.

4. Prin răcire izocoră.

C.1. $I = E : [r + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)/(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)]$, $I_1 = I(R_3 + R_4)/(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$, $I_2 = I(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$.

2. $I' = E : [r + R_1 R_3/(R_1 + R_3) + R_2 R_4/(R_2 + R_4)]$.

3. $R_4 = [r(R_1 + R_2 - R_3) - R_3(R_1 + R_2)]/(R_1 + R_2 + r)$.

4. $R_1 R_4 = R_2 R_3$.

II.39. A.1. Ecuația oscilației este $y = 0,4 \sin(2t + \pi/3) \text{ (m)} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$, $T = \pi \text{ s}$, $v = (1/\pi) \text{ s}^{-1}$.

2. $|y(t_n)| = A/2 \Rightarrow t_n = (1/2)[(-1)^n \pi/6 - \pi/3 + n\pi]$, $t_n = (1/2)[(-1)^{n+1} \pi/6 - \pi/3 + n\pi]$.

3. Se aplică teorema conservării energiei $mv_0^2/2 + ky_0^2/2 = ky_f^2/2 + \mu mg(y_f - y_0)$, de unde $y_f = 0,378$ m și $E_{p\max} = ky_f^2/2 = 0,00285$ J.

B.1. $T_A = p_A V_A / \nu R = 240,67$ K, $T_B = 2T_A$, $T_C = 4T_B = 8T_A$, $T_D = 4T_A$.

2. $L = (p_B - p_A)(V_C - V_A) = 3 \cdot 10^4$ J.

3. $Q_{\text{primit}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3\nu R(T_B - T_A)/2 + 5\nu R(T_C - T_B)/2$; $\eta = 0,18$.

C.1. $L = \mu N^2 S / l = 6,16 \cdot 10^{-2}$ H.

2. $R = \rho l_{\text{fir}} / S_{\text{fir}} = 4\rho N \pi D / \pi d^2 = 36 \Omega$, $I = U/Z = U_m / \sqrt{2}Z = 3,536$ A.

3. $P = UI \cos \varphi = RI^2 = 450$ W, $P_r = UI \sin \varphi = X_L I^2 = 242$ VAR, $P_a = UI = 512,6$ VA.

II.40. A.1. $kx_m = \mu mg \Rightarrow \mu = 0,102$.

2. Deoarece $x > x_m$, rezultă că forța de tracțiune kx este mai mare decât forța de frecare, astfel că mișcarea este uniform accelerată: $ma = kx - kx_m \Rightarrow a = 1$ m/s². Viteza corpului la intrarea pe trambulină este $v_0 = \sqrt{2aD} = 10$ m/s.

3. Corpul se desprinde de trambulină în momentul când forța centrifugă devine egală în modul cu componenta radială a greutateii (fig. II.40.A): $mv^2/R = mg \cos \varphi \Rightarrow v^2 = Rg \cos \varphi$. Aplicând teorema conservării energiei: $mv_0^2/2 + mgR = mv^2/2 + mgR \cos \varphi$, se obține $\cos \varphi = (v_0^2 + 2Rg)/3Rg = 0,707 \Rightarrow \varphi = \pi/4$. Lungimea traseului parcurs de corp pe trambulină, pînă la desprindere, este arcu $AB = \pi R/4 = 66,034$ m.

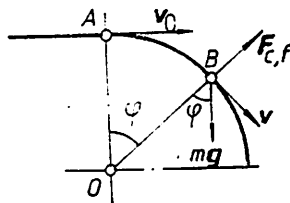


Fig. II.40.A

B.1. $T_A = 1000$ K, $p_B = p_C = 2,077 \cdot 10^5$ N/m²; $T_C = 500$ K.

2. $L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = -4155$ J; $Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) = -14543$ J; $L_{BC} < 0$, $Q_{BC} < 0$ deoarece gazul se comprimă și temperatura scade.

3. $\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{CA} + Q_{AB}} = \frac{\nu R T_A \ln 2 - \nu R(T_B - T_C)}{\nu(5/2)R(T_A - T_C) + \nu R T_A \ln 2} = 0,099$.

C.1. $e = Blv = 2 \cdot 10^{-2}$ V.

2. Rezistența circuitului este $R = \rho l/S = 8,5 \cdot 10^{-4} \Omega$; intensitatea curentului prin circuit este $I = e/R = 23,5$ A.

3. Masa conductorului NR este $m = d \cdot NR \cdot S = 0,89$ kg. Din $\mathcal{E} - BI \cdot NR - \mu mg = 0$ se obține $\mu = 0,133$.

I.1. A. Legătura ionică. Substanțe ionice. Valența.

B. Proprietățile chimice și utilizările acetilenei.

C. Ce cantități de benzen și de soluție de acid azotic cu concentrația de 63% se folosesc pentru a prepara 639 g trinitrobenzen dacă randamentul reacției este 75%.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1978)

I.2. A. Legătura covalentă în chimia organică.

B. Să se scrie reacțiile de nitrare ale benzenului, toluenului și naftalinei și redați întrebuintările produșilor obținuți.

C. În 54 g apă se introduce clor și se obține o soluție care conține de o mie de ori mai puține molecule de clor decât molecule de apă. Să se afle volumul clorului introdus în apă.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1979)

I.3. A. Fenolii.

B. Să se calculeze molaritatea soluției care conține 49 g H_2SO_4 în 0,5 l soluție.

C. Ce volum de soluție 0,3 M de acid azotic este necesar pentru neutralizarea a 30 cm³ de soluție 0,1 M de $Ca(OH)_2$?

(Admitere treapta a II-a licee, profil chimie, București, 1980)

I.4. A. Cauciucul natural și sintetic.

B.1. Într-un rezervor de 8 l se află la temperatura de 35°C un amestec de hidrogen și azot. Știind că în rezervor se află 2 moli azot și că presiunea parțială a hidrogenului este de 0,8 atm să se determine presiunea totală a amestecului de gaze.

2. Scrieți etapele obținerii acetonei plecând de la propenă. Ce alchenă se folosește pentru prepararea metil acetonei prin aceeași succesiune de reacții?

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1980)

I.5. A. Scrieți ecuațiile reacțiilor sau succesiunea de reacții prin care se obțin din etenă următoarele: (a) polietilenă; (b) alcool etilic; (c) oxid de etilenă; (d) diclorețan; (e) clorură de etil; (f) polistiren.

B. Acizi tari, acizi slabi. Baze tari, baza slabe.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1981)

1.6. A. Se dau două elemente E_1 ($Z = 1$) și E_2 ($Z = 35$) care reacționează dând un compus binar. Se cere :

- a) valența celor două elemente ;
- b) stabilirea caracterului legăturii din compusul format din E_1 și E_2 ;
- c) ce tip de cristal are compusul E_1E_2 în stare solidă ?

B. Câtă substanță dizolvată conține 0,1 l soluție 0,1 M de acid clorhidric ?

C. Electroliza topiturii de clorură de sodiu.

D. Scrieți formula structurală a compușilor propenă, 2-metil-2-butenă, 3-metil-1-butenă și explicați de ce nu pot prezenta izomeri geometrici cis-trans.

E. Proprietățile chimice ale derivaților halogenați.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1981)

1.7. A. Electroliza soluției iodurii de potasiu.

B. Se încălzesc într-o eprubetă 2,45 g $KClO_3$.

- a) Să se scrie ecuația reacției de descompunere.
- b) Să se calculeze volumul de oxigen măsurat la $20^\circ C$ și presiunea de 1 atm ce se degajă din reacție ($M_K = 39$, $M_{Cl} = 35,5$, $M_O = 16$).

C. Scrieți reacțiile ce au loc între :

- acid formic și alcool propilic ;
- acid benzoic și hidroxid de potasiu ;
- acid acetic și fenoxid de sodiu.

D. Proprietățile fizico-chimice ale alchenelor.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1982)

1.8. A. Hidroliza sărurilor.

B. Producția zilnică de hidroxid de sodiu prin electroliza clorurii de sodiu este de 2 tone. Ce cantitate de clorură de sodiu de puritate 92% se consumă zilnic ?

C. Alcoolii, proprietățile chimice, utilizări.

D. Clorurarea benzenului și a toluenului.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1982)

1.9. A. Caracterul metalic.

B. Proprietățile chimice și importanța derivaților halogenați.

C. Într-un vas Erlenmeyer se găsește o soluție 0,02 M de permanganat de potasiu slab alcalinizat. Prin soluția din vas se barbotează etenă pînă la decolorarea soluției și apariția unui precipitat brun. Dacă prin soluția din vas se barbotează $67,2 \text{ cm}^3$ etenă, ce volum de soluție a fost decolorat? Ce cantitate de precipitat se formează ($M_K = 39$, $M_{Mn} = 55$, $M_O = 17$, $M_C = 12$, $M_H = 1$).

D. a) Explicați de ce clorura de sodiu se dizolvă în apă și nu se dizolvă în benzen.

b) De ce naftalina se dizolvă în benzen și nu se dizolvă în apă ?

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1983)

I.10. A. Să se discute natura legăturilor chimice în următoarele hidruri și să se spună ce tipuri de rețele cristaline formează CsH , SiH_4 , CaH_2 , H_2S , HI .

B. Câți moli de CO_2 se găsesc într-un litru de dioxid de carbon în condiții normale.

C. Proprietățile chimice ale alcanilor.

D. Toluenul este clorurat fotochimic, obținându-se un produs clorurat *A* ce conține 44,1% Cl, 52,1% O și restul hidrogen. Produsul este hidrolizat cu randamentul de 90% rezultând o substanță *B*. Se cer:

- a) formule de structură a produșilor *A* și *B*;
- b) cantitatea de clor necesară pentru a prepara 32,2 kg substanță *A*;
- c) cantitatea de produs *B* obținută din substanța *A*.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie, București, 1983)

I.11. A. Ce compuși se obțin prin oxidarea (exclusiv arderea) următoarelor hidrocarburi: (a) etenă; (b) 2-metilbutenă-2; (c) cumen; d) naftalină.

B. Proprietățile chimice ale compuşilor halogenați:

a) Să se scrie ecuațiile reacțiilor studiate care evidențiază proprietățile acestor compuși.

b) Scrieți ecuațiile reacțiilor de clorurare a toluenului arătând condițiile în care au loc aceste reacții și denumirile produșilor de reacție.

C. Se dă un amestec de gaze compus din 4 moli CO_2 , 44,81 g CO , 6 g H_2 și $6,023 \cdot 10^{23}$ molecule de azot. Se cere:

a) Compoziția amestecului de gaze exprimată în procente molare.

b) Masa moleculară medie și densitatea în raport cu aerul a amestecului de gaze.

c) Volumul soluției 2 m de KOH necesar absorbției unuia din gazele din amestec pentru a obține o sare neutră.

d) Cantitatea de HCl necesară pentru a obține prin electroliză în soluție, cantitatea de hidroxid de potasiu folosită la punctul c) precum și ecuațiile reacțiilor care au loc la electroliză.

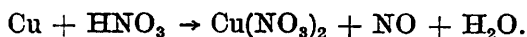
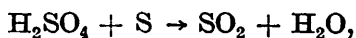
e) Reacția de hidroliză a sării obținută la absorbția CO_2 în soluția de hidroxid de potasiu.

(Admitere treapta a II-a, licee profil biologie-chimie, 1984)

I.12. A. Reacții de adiție la hidrocarburile studiate.

B. În sinteza acidului clorhidric din elemente, din 142 kg clor introdus în fabricație, se obțin 116,8 kg acid clorhidric. Cu ce randament s-a lucrat?

C. Să se egaleze, prin metoda redox, următoarele ecuații chimice:



D. Ce metodă se folosește pentru obținerea fenolului la Combinatul Chimic din Borzești?

(Admitere treapta a II-a, profil chimie, Bacău, 1984)

I.13. A. Proteine : definiție, clasificare, proprietăți.

B. Se amestecă 400 g soluție 10% hidroxid de sodiu cu 400 g soluție 50% hidroxid de sodiu și cu 200 g apă. Să se afle concentrația procentuală a soluției obținute.

C. Scrieți ecuațiile reacțiilor transformărilor de mai jos :

- a) etenă → acid propionic,
- b) acetilenă → acid acrilic,
- c) toluen → acid fenil acetic,
- d) p. xilen → tereftalat de metil,
- e) etenă → acetat de etil,
- f) naftalină → anhidridă ftalică.

(Admitere treapta a II-a, licee profil agricol, Bacău, 1984)

I.14. A. Metode de preparare a compușilor halogenați.

B. Se dau două elemente : E_1 ($Z = 1$) și E_2 ($Z = 35$) care reacționează dînd un compus binar. Se cere :

- a) Valența celor două elemente.
- b) Stabilirea caracterului legăturii din compusul format de E_1 cu E_2 .
- c) Ce tip de cristal are compusul E_1E_2 în stare solidă ?

C. Se supun electrolizei 500 g soluție de sulfat de cupru de concentrație 20%. Ce cantitate de metal se depune la catod ? Ce gaz și ce volum din acest gaz (în condiții normale) se degajă la anod ?

(Admitere treapta a II-a, licee profil industrie alimentară, chimie industrială, Bacău, 1985)

I.15. A. Reacții comune aldehidelor și cetonelor.

B. Se dă un amestec de gaze : 0,5 moli CO_2 , 33,6 l CO , 8 g H_2 și 0,001 kmoli N_2 . Să se determine :

- a) Compoziția, în procente de moli, a amestecului.
- b) Masa moleculară medie, densitatea medie și densitatea în raport cu aerul a amestecului.
- c) Volumul de aer (cu 20% O_2 în volume) necesar pentru arderea amestecului.
- d) Volumul soluției de NaCl 6 M care prin electroliză formează aceeași cantitate de hidrogen cît conține amestecul.

C. Se dă o substanță organică cu masa moleculară 60, conținînd 60% carbon și avînd raportul masic $\text{O} : \text{H} = 2 : 1$. Substanța prezintă 3 izomeri A, B, C. Izomerul A nu se oxidează și nu hidrolizează. Izomerii B și C se oxidează blînd și rezultă produșii D, respectiv E. Substanța E reacționează cu reactivul Tollens. Se cere :

- a) Să se identifice izomerii A, B, C.
- b) Volumul de aer (conținînd 20% O_2) necesar arderii complete a 12 g izomer A.
- c) Succesiunea transformărilor de la D la E și de la E la D.

(Admitere treapta a II-a, licee profil chimie-biologie, 1985)

I.16. A. Legătura covalentă polară. Interacții între molecule polare.

B. Indicați căile de sinteză și reactanții necesari pentru transformările :

1. metan $\rightarrow$ poliacrilonitril,
2. etenă $\rightarrow$ propionat de etil,
3. para-nitrotoluen $\rightarrow$ acid *p* - acetil-amino-benzoic,
4. benzen $\rightarrow$ acid 2-clor-4-nitrobenzoic.

C. O cantitate de 34,4 g grăsime este supusă hidrolizei alcaline cu 400 cm³ soluție 0,5 m hidroxid de potasiu. După hidroliza totală a grăsimii (randament 100%) excesul de hidroxid de potasiu este neutralizat de 40 g soluție HCl cu o concentrație 7,3%. Se cere :

1. Să se determine masa de hidroxid de potasiu (exprimată în grame) necesară pentru a hidroliza 1 g grăsime.

2. Notindu-se acizii din grăsime cu formule generale (de tipul $R-\text{COOH}$), să se scrie ecuația chimică a hidrolizei unei grăsimi în prezența hidroxidului de potasiu.

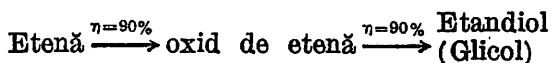
Mase atomice : C = 12, H = 1, O = 16, K = 39, Cl = 35,5.

(Admitere treapta a II-a, licee cu profilele : chimie-biologie, sanitar, fizică-chimie, iulie, 1986)

I.17. A. Hidroliza sărurilor.

B. Proprietățile chimice ale acizilor carboxilici.

C. Se realizează succesiunea de reacții :



(Randamentele sînt menționate în schemă)

Se cere :

1. Să se scrie ecuațiile reacțiilor chimice și condițiile de reacție.
 2. Ce cantitate de oxid de etenă (kg) se obține din 2 000 m³ etenă (măsurată în condiții normale).
 3. Ce cantitate de glicol (kg) se obține din 2 000 m³ etenă (măsurată în condiții normale).
 4. Ce formulă procentuală are glicolul?
- Mase atomice : C = 12, H = 1, O = 16.

(Admitere treapta a II-a licee cu profilele : materiale construcții, industrie alimentară, chimie industrială, industrial-agricol, alimentație publică, iulie, 1986)

I. Subiecte date la examen 207-211

REZOLVĂRI 212-237

1.1. A. Subiectele se vor trata conform cu manualul, urmărind :

a) Valența : definiție, valența ionică pozitivă, valența ionică negativă, valența pozitivă a metalelor tranziționale, elemente cu valență variabilă, covalența.

b) Legătura ionică : tipuri de elemente care formează o astfel de legătură, formarea ionilor, cauza transferului de electroni, forțele electrostatice, ioni monoatomici, ioni poliatomici, exemple de substanțe cu legături ionice.

c) Substanțe ionice : rețele ionice, particule în noduri, forțe, proprietăți.

B. Se va trata conform cu manualul de clasa a X-a după următorul plan :

Definiție alchine, exemple. Structura triplei legături, caracterul nesaturat și proprietățile specifice.

Reacții de adiție. Adiția H_2 , condiții, denumirea compuşilor. Adiția Br_2 , Cl_2 , condiții, produși de reacție, izomeri cis, trans, utilizările produşilor. Adiția HCl , condiții, polimerizarea clorurii de vinil. Adiția HCN , condiții, polimerizarea și copolimerizarea cu butadienă a acrilonitrilului. Adiția CH_3COOH , condiții, polimerizarea acetatului de vinil. Adiția apei la acetilenă, condiții, utilizările acetaldehidei. Adiția apei și la alchine superioare rezultând cetone.

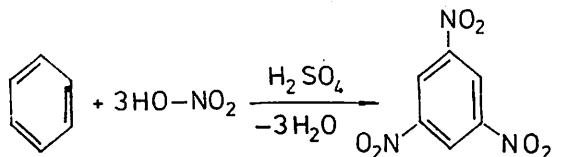
Dimerizarea acetilenei, condiții, obținerea butadienei, obținerea cloroprenului, polimerizarea cloroprenului.

Trimerizarea acetilenei, condiții.

Oxidarea, arderea, utilizări. Oxidarea cu soluție de permanganat de potasiu.

Reacții de substituție : caracterul slab acid al acetilenei, explicații. Reacția cu sodiu, denumirea produşilor de reacție, stabilitatea termică, hidroliza carburii de calciu și a acetilurii de sodiu scrisă ionic și molecular, refacerea alchinei de la care provin. Reacția cu clorura diaminocuproasă, cu reactiv Tollens, prepararea reactivului. Caracteristicile acetilurilor metalelor tranziționale. Reacții de substituție cu metalele servesc la identificarea triplei legături marginale. Utilizările acetilenei.

C.



1, 3, 5-trinitrobenzen

Varianța I.

$M_{C_6H_6} = 78$ g, $M_{HNO_3} = 63$ g, $M_{T.N.B.} = 213$ g. Masa utilă de C_6H_6 se obține din :

$$78/x = 213/639 \Rightarrow x = 234 \text{ g } C_6H_6.$$

Masa de benzen consumată se obține din formula randamentului

$$\eta = \frac{\text{masa utilă de } C_6H_6}{\text{masa consumată de } C_6H_6} \cdot 100.$$

Avem : $m_s = 234 \cdot 100/75 = 312 \text{ g } C_6H_6$.

Analog pentru HNO_3 :

$$3 \cdot 63/y = 213/639 \Rightarrow y = 567 \text{ g } HNO_3 \text{ masă utilă.}$$

$m_s = 567 \cdot 100/75 = 756 \text{ g } HNO_3$ și $m_{sol} = 756 \cdot 100/63 = 1200 \text{ g}$ soluție 63% HNO_3 .

Varianta a II-a.

Se află masa teoretică de trinitrobenzen, aplicind formula randamentului :

$$\eta = m_p \cdot 100/m_t \Rightarrow m_t = 639 \cdot 100/75 = 852 \text{ g.}$$

Din ecuația chimică se află cantitatea consumată de benzen :

$$78/x' = 213/852 \Rightarrow x' = 312 \text{ g benzen.}$$

Analog, pentru acid azotic :

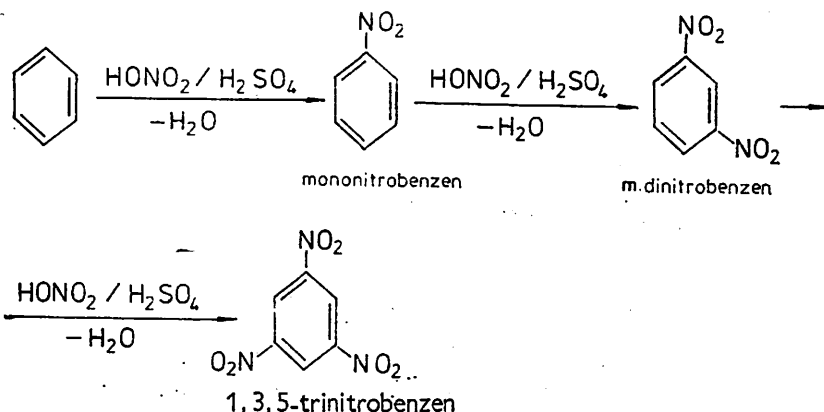
$$3 \cdot 63/y' = 213/852 \Rightarrow y' = 756 \text{ g, } m_{sol} = 856 \cdot 100/62 = 1200 \text{ g.}$$

1.2. A. Se va dezvolta conform cu manualul de clasa a X-a, folosind și unele noțiuni din clasa a IX-a. În compușii organici întâlnim legături ionice (fenoxizi, acetati, săruri de alchil amoniu, săpunuri, acetiluri) și legături covalente (polare, nepolare și coordinative).

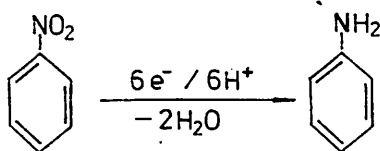
Definiția legăturii covalente. La formarea legăturii covalente elementele organogene participă cu orbitali în stare fundamentală sau cu orbitali hibridi (sp^3 , sp^2 , sp). În compușii organici se întâlnesc legături simple (sigma), duble și triple. Compușii care au numai legături sigma sînt saturați, iar cei cu legături multiple prezintă caracter nesaturat sau aromatic (în cazul celor care conțin nucleu aromatic). Proprietățile specifice legăturii covalente :

- orientarea în spațiu, exemple ;
- unghiurile dintre atomi, exemple ;
- atomii legați covalent formează molecule.

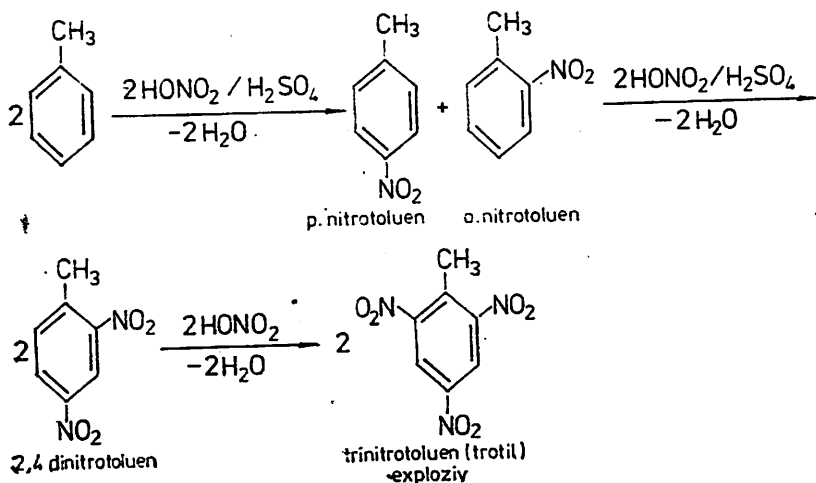
B. Reacția de nitrare se realizează cu amestec sulfonitric și constă în introducerea unui număr de grupe NO_2 în molecula unor compuși organici. Grupa nitro este un substituent de ordinul II și va orienta în poziția meta



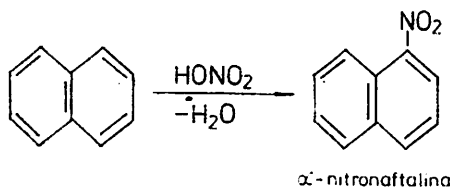
Mononitrobenzenul este utilizat în parfumerie și la obținerea anilinei după reacția :



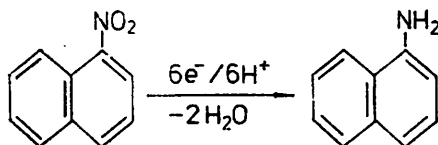
Toluenul se nitrează mai ușor ca benzenul :



Naftalina se nitrează numai în poziția α . β -nitronaftalina se obține prin căi indirecte.



α -nitronaftalina se folosește în industria coloranților, iar prin reducere formează α -naftil amină :



C. În ipoteza că clorul nu reacționează cu apa, ci numai se dizolvă fizic, avem :

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = 54/18 = 3 \text{ moli.}$$

Numărul de molecule de apă este :

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = n \cdot N = 3 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} = 18,069 \cdot 10^{23}$$

și atunci, numărul de molecule de clor este : $N_{\text{Cl}_2} = N_{\text{H}_2\text{O}}/10^3 = 18,069 \cdot 10^{20}$.

1.3. A. Subiectul se va trata conform cu manualul de clasa a X-a, urmărindu-se :

Definiție fenoli, clasificare. Izomeri de poziție la crezoli, naftoli, difenoli de funcțiune cu eterii aromatici (monofenolii).

Obținere prin metoda cumen, topire alcalină și din gudroanele de coesificare (exemplificare pentru fenol, naftol și un difenol).

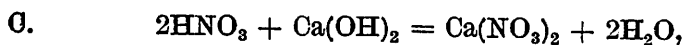
Proprietăți fizice. Structura fenolului și influența reciprocă între nucleu și grupa OH. Reacții pentru $-\text{OH}$; fenolii sînt acizi mai tari decît apa și decît alcoolii; reacția cu bazele, proprietățile fenoxizilor, dezinfectarea fenolului de către acidul carbonic, de acidul acetic, dar nu și de către apă.

Esterificarea cu cloruri acide, identificarea cu FeCl_3 (culorile de la partea experimentală din manual). Reacții pentru nucleu de substituție (halogenare, nitrare, sulfonare), de condensare cu formaldehidă în mediul acid și bazic, de hidrogenare pînă la obținerea reținului fibră poliamidică.

Utilizările conform manualului.

B. Molaritatea se calculează după formula :

$$M = m_d / V_{\text{sol}} \cdot M_d = 49 / 0,5 \cdot 98 = 1.$$



$$M_{\text{Ca}(\text{OH})_2} = 74 \text{ g}, \quad M_{\text{HNO}_3} = 63 \text{ g}.$$

Din formula molarității se determină :

$$m_{\text{Ca}(\text{OH})_2} = m \cdot V_{\text{sol}} \cdot M_d = 0,1 \cdot 0,03 \cdot 74 = 0,222 \text{ g}.$$

$$n_{\text{Ca}(\text{OH})_2} = 0,222 / 74 = 0,003 \text{ moli}, \quad \text{sau} \quad n_{\text{Ca}(\text{OH})_2} = m \cdot V_{\text{sol}} = 0,1 \cdot 0,02 = 0,003 \text{ moli}.$$

Din ecuația reacției se determină masa de HNO_3 :

$$2 \cdot 63 / x = 74 / 0,222 \Rightarrow x = 2 \cdot 63 \cdot 0,222 / 74 = 0,378 \text{ g HNO}_3.$$

Sau din ecuație se observă că se consumă de două ori mai mulți moli de acid față de bază, astfel că $n_{\text{HNO}_3} = 2 \cdot 0,003 = 0,006 \text{ moli}.$

$$V_{\text{sol HNO}_3} = m_d / m \cdot M_d = 0,378 / 0,3 \cdot 63 = 0,021 = 20 \text{ ml}, \text{ sau}$$

$$V_{\text{sol HNO}_3} = \text{nr. moli} / \text{molaritate} = 0,006 / 0,3 = 0,021 = 20 \text{ ml}.$$

1.4. A. Cauciucul natural se va trata conform cu manualul de clasa a X-a.

În fabricarea cauciucului sintetic se disting două etape : (a) fabricarea monomerilor și (b) polimerizarea sau copolimerizarea monomerilor. Definirea și reprezentarea generală a polimerizării. Tipuri de cauciuc sintetic :

— cauciuc polibutadienic : butadiena se obține prin dehidrogenarea amestecului de gaze (butan, butene) apoi polimerizarea conform cu manualul ;

— cauciuc cloroprenic : obținerea cloroprenului din C_2H_2 și apoi polimerizarea ;

— cauciuc butadienstirenic : obținerea stirenului și copolimerizarea cu butadienă ;

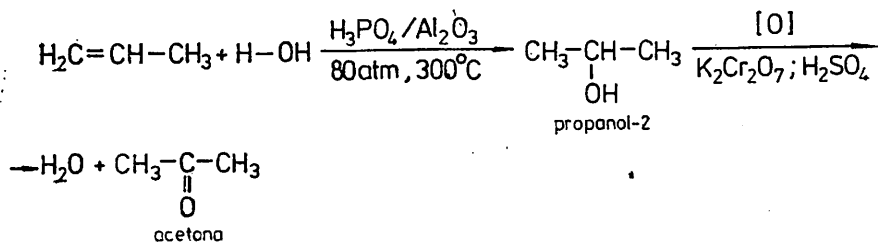
— cauciuc butadienacrilonitrilic : obținerea crinonitrilului și copolimerizarea cu butadienă ;

— cauciuc butadien- α -metilstirenic : obținerea α -metilstirenului și copolimerizarea cu butadienă.

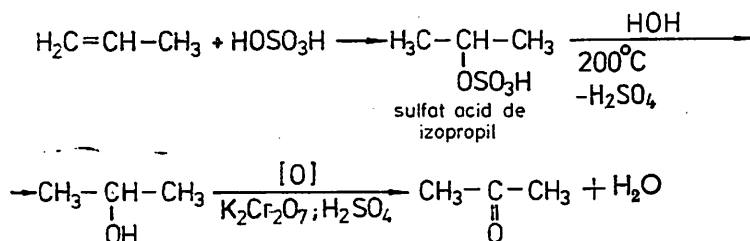
B. a)

$$p_{H_2}V = n_{H_2}RT; \quad p_{N_2}V = n_{N_2}RT; \quad p = p_{H_2} + p_{N_2} = p_{H_2} + n_{N_2}RT/V_a' = \\ = 7,11 \text{ atm}$$

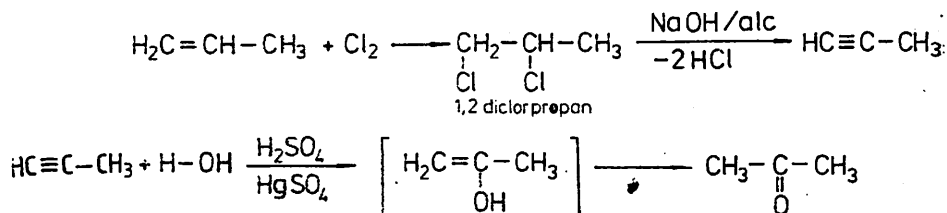
b) Varianta I.



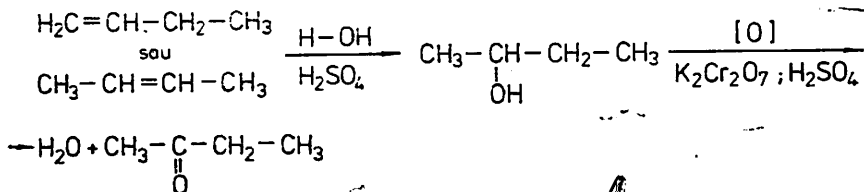
Varianta a II-a.



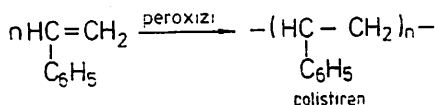
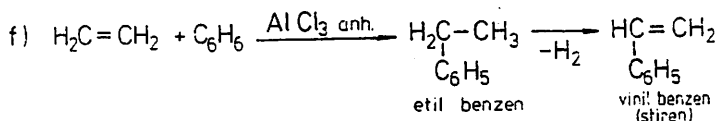
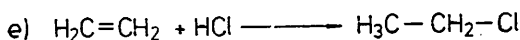
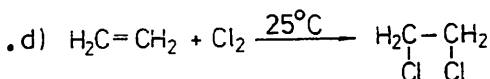
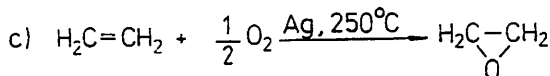
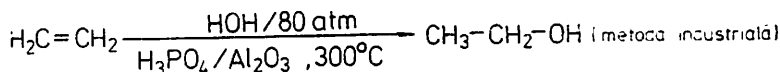
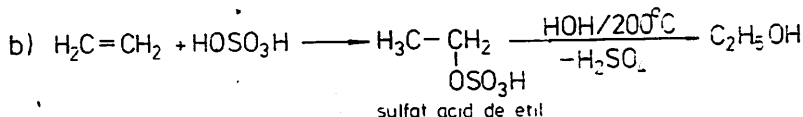
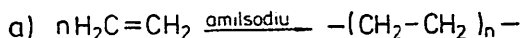
Varianta a III-a.



Pentru a obține metilacetona se pleacă de la butenă 1 sau 2 :



1.5. A.



B. Subiectul se tratează conform cu manualul de clasa a IX-a.

Definiția Brönsted a acizilor tari și a acizilor slabi; exemple.

Variația tăriei acizilor în grupă și în perioadă. Reacția acizilor cu metalele, neutralizarea și dezlocuirea celor slabi de cei tari; gradul de ionizare.

Definiția bazelor după Brönsted, exemple de baze Brönsted. Definiția bazelor tari și slabe; exemple. Variația tăriei bazelor în grupă și în perioadă. Dezlocuirea bazelor slabe de către cele tari din săruri.

Există și substanțe cu caracter acid și bazic. Aceste substanțe cu acizii tari reacționează ca baze și cu bazele tari reacționează ca acizi. Acești compuși se numesc amfoliți (substanțe amfotere). Exemplificarea caracterului amfoter.

1.6. A. a) Configurațiile electronice ale celor două elemente sînt :

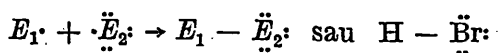
$$E_1: \frac{K=1}{1s^1}; \quad E_2: \frac{K=2}{1s^2}; \quad \frac{L=8}{2s^2 2p^6}; \quad \frac{M=18}{3s^2 3p^6 3d^{10}}; \quad \frac{N=7}{4s^2 4p^5}.$$

Se observă că elementul E_1 este hidrogen și este situat în grupa I, perioada 1; are deci valența $+1$ (H^+ proton), -1 (H^- hidrură) și covalența 1.

Elementul E_2 este un halogen situat în grupa a VII-a, perioada a 4-a și are valențele -1 (X^- halogenură), $+1$, $+3$, $+5$, $+7$ și covalența 1.

b) $(E_1) + (E_2) \rightarrow 2(E_1)(E_2)$. Se recunoaște că E_2 este bromul și reacția este: $\text{H}_2 + \text{Br}_2 = 2\text{HBr}$.

c) Legătura $E_1 - E_2$ este o legătură covalentă de tip σ polară :



La formarea acestei legături participă orbitalii s și p :



d) Cristal molecular cu forțe dipol-dipol între molecule.

B. Din formula molarității $m = m_a / V_{\text{sol}} \cdot M_a$ rezultă $m_a =$
 $= m \cdot V \cdot M_a = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 36,5 = 0,365$ g, sau

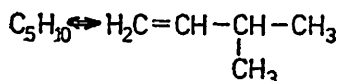
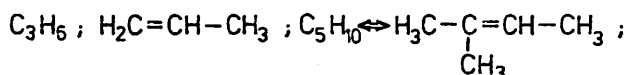
$$\begin{array}{l} 1 \text{ l sol} \dots\dots\dots 0,1 \text{ moli HCl} \\ 0,1 \text{ l sol} \dots\dots\dots n \text{ moli HCl} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ moli HCl} \\ m = n \cdot M = 0,01 \cdot 36,5 = 0,365 \text{ g HCl} \end{array}$$

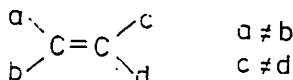
C. Se va trata conform cu manualul clasei a IX-a.

Definiția electrolizei, fenomen redox. Apoi se prezintă electroliza, precizindu-se că la catod are loc reducerea, iar la anod oxidare și totodată se precizează reacțiile principale și secundare.

D.



Acești compuși îndeplinesc condiția de împiedicare a rotației libere a doi atomi de carbon prin prezența dublei legături, planul de referință fiind planul legăturii perpendiculare pe planul legăturilor. Dar nu îndeplinesc a doua condiție necesară existenței izomerilor geometrici, neidentitatea simultană a substituenților de la atomii de carbon din dubla legătură :

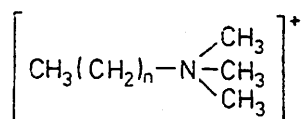


E. Se tratează conform cu manualul clasei a X-a după următoarele puncte :

Definiția derivaților halogenați, 2-3 exemple. Structura, polaritatea legăturii $\sigma C - X$ formată din orbitalii hibridi (sp , sp^2 , sp^3) și p , și reactivitatea acestor compuși.

Hidroliza derivaților mono, di (vicinali, geminali) și trihalogenați, reacții generale și cazuri particulare.

Derivații halogenați sint agenți de alchilare. Prin alchilarea amoniului se obține un amestec de amine primare, secundare și terțiare, alături de săruri cuaternare de amoniu. Astfel se obțin detergenți cationici de forma :



în care $n = 10 \dots 16$. Metoda alchilării este folosită la obținerea aminelor mixte (N, N-dimetilanilina).

Derivații halogenați sint agenți de alchilare pentru arene, obținându-se alchil arene.

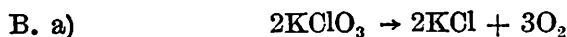
Dehidrohalogenarea derivaților halogenați și obținerea alchenelor. Reacția cu Mg în mediu de eter anhidru, importanța reacției.

Reacția cu cianuri alcaline ; importanța reacției pentru obținerea de amine, amide, acizi cu catenă mărită (se va da un exemplu general și cite un caz particular cu denumirea aminei, amidei și acidului rezultat).

Derivații halogenați pot fi halogenați, obținându-se compuși polihalogenați ($\text{CH}_3\text{Cl} + \text{Cl}_2 \xrightarrow{\text{lumină}} \text{CH}_2\text{Cl}_2 + \text{HCl}$).

Derivații halogenați nesaturați polimerizează (clorura de vinil, cloroprenul, tetrafluoretena).

1.7. A. Electroliza soluției de iodură de potasiu se tratează după manualul clasei a IX-A : definiția electrolizei, fenomen redox : la catod reducere, la anod oxidare. Prezentarea ionilor din soluție, descărcarea lor, identificarea produșilor de reacție, ordinea de descărcare a unor ioni.



b) *Varianta I.*

$$M_{\text{KClO}_3} = 122,5 \text{ g} ; 2 \cdot 122,5 / 2,45 = 3 \cdot 22,4 / V_0 \rightarrow V_0 = 0,672 \text{ l.}$$

$$V_0 / T_0 = V / T \text{ (} p = \text{constant)} \rightarrow V = V_0 T / T_0 = 0,672 \cdot 293 / 273 = 0,721 \text{ l.}$$

Varianta a II-a.

Numărul de moli de KClO_3 este : $2,45 / 122,5 = 0,02$.

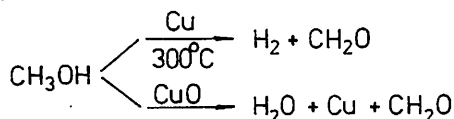
$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ moli } \text{KClO}_3 & & 3 \text{ moli } \text{O}_2 \\ 0,02 \text{ moli } \text{KClO}_3 & & n \\ \hline n = 0,02 \cdot 3 / 2 = 0,03 \text{ moli} \end{array}$$

$$V_3 = 0,03 \cdot 22,4 = 0,672 \text{ l} ; V_0 / T_0 = V / T \rightarrow V = V_0 T / T_0 = 0,721 \text{ l.}$$

c) Deshidratarea : condiții. Deshidratarea la alchene, în general și caz particular ; deshidratarea la eteri, caracteristici ale eterilor ; deshidratarea glicerinei.

d) Esterificarea alcoolilor : definiție esterificare, condiții. Reacții de esterificare cu : acizi minerali ($\text{CH}_3\text{OH} + \text{HOSO}_3\text{H}$, glicerină + HONO_2), acizi organici ($\text{CH}_3\text{COOH} + \text{etanol}$, acid tereftalic + glicol, acid metacrilic + metanol) și cu anhidride acide, glicerina este în natură esterificată cu acizi grași (gliceride), cu cloruri acide.

e) Oxidarea alcoolilor : arderea ; oxidarea blindă în mediu de $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4$ a alcoolilor primari și secundari ; oxidarea energetică în mediu de $\text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4$ a alcoolilor primari, secundari, terțiari. Oxidarea metanolului :



Oxidarea fermentativă a etanolului.

f) Utilizări conform cu manualul.

D. Se tratează conform cu manualul clasei a X-a : Definiția clorurării. Datorită caracterului aromatic, arenele se clorurează prin reacții de adiție și prin reacții de substituție. Clorurarea C_6H_6 prin adiție : condiții, definirea produsului de reacție, utilizări. Clorurarea catalitică, prin substituție a C_6H_6 : reacția, denumirea produsului, utilizarea la obținerea DDT și a coloranților. Clorurarea toluenului în catenă : condiții, denumirile produșilor ce rezultă prin hidroliza lor (benzaldehida, acid benzoic, alcool benzilic).

Clorurarea toluenului în nucleu : condiții, denumirile produșilor.

I. 9. A. Definiția caracterului metalic. Caracterul metalic se pune în evidență prin :

- energia de ionizare (cu cât este mai mică cu atât caracterul metalic este mai pronunțat) ;
- tăria bazelor (cu cât baza este mai puternică cu atât caracterul metalic este mai pronunțat) ;
- ușurința cu care se oxidează, descompun apa, dezlocuiesc hidrogenul din acizi ;
- prin solubilitatea oxizilor în apă.

Caracterul metalic variază în lungul perioadei și în lungul grupeii. Variația caracterului metalic în lungul perioadei este exemplificat pentru metalele Na, Mg, Al în tabelul următor :

Proprietatea	Na	Al	Mg	Concluzii
Valența	+1	+2	+3	crește
Energia de ionizare	E_1	$< E_2$	$< E_3$	crește
Reacții de oxidare	f. ușor Na_2O	aprins MgO	aprins (Al_2O_3)	scade ușurința de oxidare
Solubilitatea oxizilor în apă	ușor solubil	greu solubil	insolubil	scade solubilitatea
Tăria bazelor	NaOH f. puternic	$\text{Mg}(\text{OH})_2$ tărie mijlocie	$\text{Al}(\text{OH})_3$ amfoteră	scade tăria bazelor

Caracterul metalic scade de la Na spre Al.

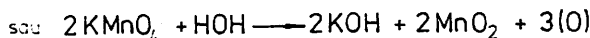
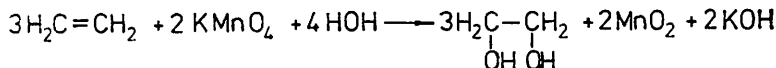
Elementele cu caracter metalic sînt așezate în stînga sistemului periodic.

Variația caracterului metalic în grupă : de exemplu, pentru metalele Na, K, Rb, Cs caracterul metalic crește de la Na spre Cs. Cele mai active metale se găsesc în grupa I și cel mai activ este cesiu.

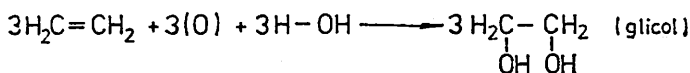
Metalele tranziționale cu electronul distinctiv în substratul *d* ; valență variabilă, exemple.

Lantanidele și actinidele au electronul distinctiv în substratul *f*.

B. Vezi I.6.E. Utilizările, tot conform manualului de clasa a X-a. În plus, utilizarea derivaților halogenați ca agenți de alchilare pentru amine sau pentru arene.



C.



Varianta I.

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 22,4 \text{ l C}_2\text{H}_4 & & 2 \text{ moli KMnO}_4 \\ 0,0672 \text{ l} & & x \\ \hline x & = & 2 \cdot 10^{-3} \text{ moli KMnO}_4 \\ \\ 1 \text{ l sol} & & 2 \cdot 10^{-2} \text{ moli KMnO}_4 \\ V & & 2 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \\ \hline V & = & 0,1 \text{ l soluție KMnO}_4 \end{array}$$

Varianta a II-a.

$$\begin{array}{rcl} n_{\text{C}_2\text{H}_4} & = & 0,0672/22,4 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \\ 3 \text{ moli C}_2\text{H}_4 & & 2 \text{ moli KMnO}_4 \\ 3 \cdot 10^{-3} \text{ C}_2\text{H}_4 & & x \\ \hline x & = & 2 \cdot 10^{-3} \text{ moli KMnO}_4 \end{array}$$

$$V_{\text{sol}} = n_{\text{moli}}/\text{molaritate} = 2 \cdot 10^{-3}/2 \cdot 10^{-2} = 0,1 \text{ l.}$$

Varianta a III-a.

$$\begin{array}{rcl} M_{\text{KMnO}_4} & = & 158 \text{ g} \\ 3 \cdot 22,4 \text{ l C}_2\text{H}_4 & & 3 \cdot 16 \text{ g (O)} \\ 0,0672 \text{ l} & & n_0 \\ \hline n_0 & = & 48 \cdot 10^{-3} \text{ g oxigen.} \\ \\ 3 \cdot 16 \text{ g oxigen} & & 2 \cdot 158 \text{ g KMnO}_4 \\ 48 \cdot 10^{-3} & & m \\ \hline m_{\text{KMnO}_4} & = & 316 \cdot 10^{-3} \text{ g} \end{array}$$

$$m = m_d/V \cdot M_d \rightarrow V_{\text{sol}} = m_d/m \cdot M_d = 316 \cdot 10^{-3}/2 \cdot 10^{-2} \cdot 158 = 0,1 \text{ l.}$$

D. Dizolvarea unei substanțe cristaline într-un lichid constă în:
 — desprinderea particulelor din rețea în urma interacțiunii dintre particulele solventului și cele din rețea;
 — stabilirea unor noi interacții (legături) între particulele desprinse și cele ale solventului.

a) La dizolvarea clorurii de sodiu în apă, aceste două faze sînt date în manualul clasei a IX-a.

Noile legături care se stabilesc sînt de natură electrostatică ion-dipol. Deci între solvat și solvent există o afinitate.

Dacă cristalele de clorură de sodiu sînt introduse în benzen, nu apar interacții deoarece moleculele de benzen sînt nepolare (între molecule se exercită forțe Van der Waals). Ca urmare nu există afinitate între ioni și molecule nepolare.

b) Cristalele naftalinei sînt cristale moleculare ce conțin molecule nepolare, cu forțe Van der Waals. Între moleculele de benzen (nepolare) și moleculele naftalinei (nepolare) apar forțe de atracție de tip Van der Waals; fiind o afinitate între solvat și solvent, dizolvarea are loc. Apa, solvent polar cu legături de hidrogen între molecule, nu va dizolva naftalina. Între dipolii apei și moleculele nepolare ale naftalinei nu se stabilesc nici un fel de interacții.

I.10. A. Între elementele cu caracter electrochimic diferit (metale și nemetale) se stabilesc legături ionice, iar între elemente cu caracter electrochimic apropiat se stabilesc legături covalente (între nemetale).

a) CsH: Cesiul metal puternic electropozitiv și hidrogenul nemetal conduc la legături ionice Cs^+H^- ; cristale ionice cu forțe electrostatice de atracție.

b) SiH_4 (siliciu nemetal, hidrogen nemetal)—legături covalente nepolare (moleculă simetrică, tetragonală, $109^\circ 28'$), cristale moleculare cu forțe Van der Waals.

c) CaH_2 (Ca metal, H nemetal) — legătură ionică $\text{Ca}^{2+}2\text{H}^-$, cristale ionice, cu forțe electrostatice între particule.

d) H_2S (S nemetal, H—nemetal) legături covalente polare, 90° , cristale moleculare cu forțe dipol-dipol.

e) HI (H nemetal, I nemetal)—legături covalente polare H-I. Legătura σ este formată din orbitalul p_x al iodului și s al hidrogenului. HI formează cristale moleculare cu forțe dipol-dipol.

B. $n_{\text{CO}_2} = (1/22,4)$ moli/l.

C. Tratarea conform cu manualul clasei a X-a:

a) Definiție alcani.

b) Legăturile din moleculele alcanilor, clasificarea proprietăților — conform manualului.

c) Halogenarea: definiție reacție de substituție, definiție halogenare, agenți de halogenare Cl_2 , Br_2 (cu F_2 nu se halogenează direct pentru că este foarte activ, iar cu I_2 nu se halogenează direct fiind un halogen foarte puțin activ); exemple de clorurare, condiții, utilizările produsilor obținuți.

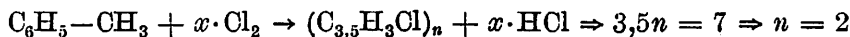
d) Oxidarea: tipuri de oxidare, arderea, amestec detonant, oxidarea CH_4 cu aer, oxidarea catalitică a metanului, amono-oxidarea metanului, oxidarea alcanilor superiori la acizi grași ($\text{R}-\text{CH}_3 \xrightarrow[100^\circ\text{C, catalizator}]{} \text{RCOOH} + \text{H}_2\text{O}$), conversia metanului cu vapori de apă.

e) Izomerizarea (conform manualului).

f) Descompunerea termică : stabilitatea termică a alcanilor ; dehidrogenarea și cracarea ; dehidrogenarea cicloalcanilor cu obținerea de arene ; dehidrogenarea și ciclizarea (la 500°C, 15÷30 atm, catalizator de platină) alcanilor cu formare de arene.

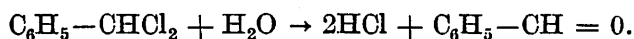
D. a) Se calculează formula brută a produsului A :

$$\begin{aligned}\text{Cl} : 44,1/35,5 &= 1,24, & n_{\text{Cl}} &= 1,24/1,24 = 1, \\ \text{C} : 52,1/12 &= 4,34, & n_{\text{C}} &= 4,34/1,24 = 3,5, \\ \text{H} : 3,8/1 &= 3,8, & n_{\text{H}} &= 3,8/1,24 = 3,\end{aligned}$$



(produsul A este clorură de benziliden $\text{C}_6\text{H}_5-\text{CHCl}_2$ și se obține conform reacției : $\text{C}_6\text{H}_5-\text{CH}_3 + 2\text{Cl}_2 \xrightarrow{\text{lumina}} \text{C}_6\text{H}_5-\text{CHCl}_2 + 2\text{HCl}$).

În continuare, prin hidroliza produsului A se obține produsul B — aldehida benzoică :



b) Avem : $M_{\text{Cl}_2} = 71$, $M_A = 161$.

Variantă I.

$$\frac{M_A}{2M_{\text{Cl}_2}} = \frac{32,2}{m_{\text{Cl}_2}}, \quad m_{\text{Cl}_2} = 28,4 \text{ kg}.$$

Variantă a II-a.

$$\begin{array}{rcl} n_A & = & 32,6/161 = 0,2 \text{ kmol} \\ 1 \text{ kmol } A & \dots\dots\dots & 2 \text{ kmol } \text{Cl}_2 \\ 0,2 & \dots\dots\dots & n_{\text{Cl}_2} \\ \hline n_{\text{Cl}_2} & = & 0,4 \text{ kmol} \end{array}$$

de unde $m_{\text{Cl}_2} = 0,4 \cdot 71 = 28,4 \text{ kg}$.

c) Avem : $M_B = 106$.

Variantă I.

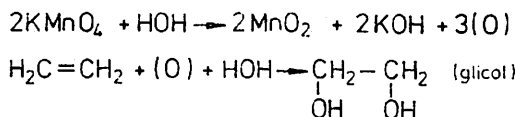
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ kmol } A & \dots\dots\dots & 1 \text{ kmol } B \\ 0,2 & \dots\dots\dots & n_B \\ \hline n_B & = & 0,2 \text{ kmol}, \quad m_B = 0,2 \cdot 106 = 21,2 \text{ kg}. \\ m_{\text{practică}} & = & (90/100) \cdot m_B = 19,08 \text{ kg}. \end{array}$$

Variantă a II-a.

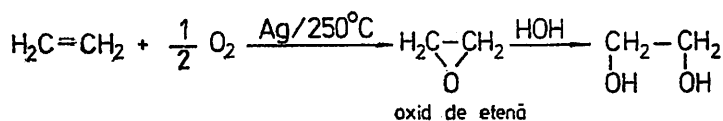
Cantitatea teoretică de compus A necesară este $m_t = (90/100) \cdot 32,2 = 28,98 \text{ kg}$.

$$\begin{array}{rcl} 161 \text{ kg } A & \dots\dots\dots & 106 \text{ kg } B \\ 28,98 & \dots\dots\dots & m_B \\ \hline m_B & = & 28,98 \cdot 106/161 = 19,08 \text{ kg}. \end{array}$$

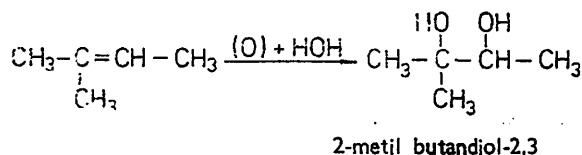
1.11. A. a) Oxidarea etenei cu soluție de KMnO_4 slab alcalinizată :



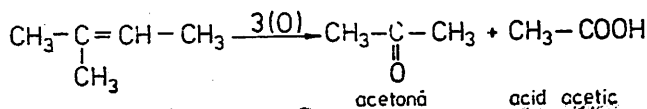
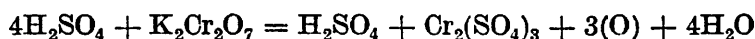
Oxidarea etenei cu aer în prezența Ag la 250°C :



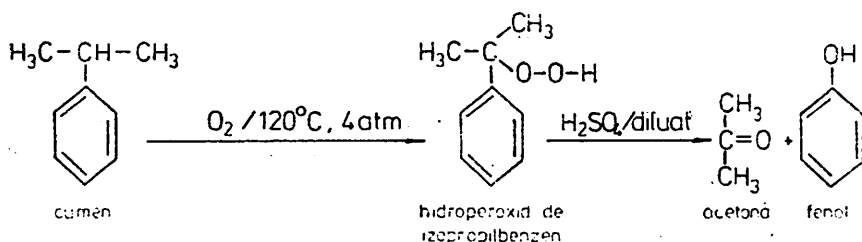
b) Oxidarea 2-metilbutenei-2 cu $\text{KMnO}_4 + \text{HOH}$:



Oxidarea cu soluție acidulată de dicromat de potasiu :



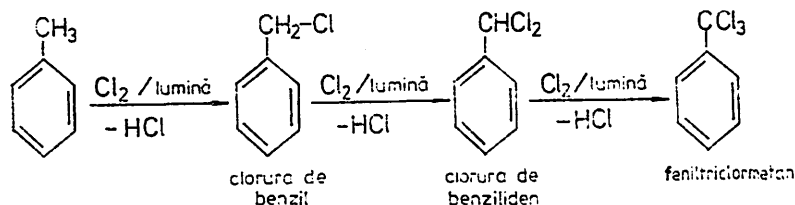
c) Oxidarea cumenului cu aer la 120°C și 4 atm



d) Oxidarea naftalinei cu aer la 350°C și catalizator V_2O_5 , conform manualului.

B. a) Vezi I.6.E.

b) Reacția în catena laterală, în prezența luminii, cu formarea a trei produși :



CC1=CC=CC=C1 $\xrightarrow[-2\text{HCl}]{2\text{Cl}_2/\text{FeCl}_3}$ CC1=CC=C(Cl)C=C1 + CC1=CC=C(Cl)C=C1 $\xrightarrow[-2\text{HCl}]{2\text{Cl}_2/\text{FeCl}_3}$ CC1=C(Cl)C(Cl)=CC=C1 $\xrightarrow[-2\text{HCl}]{2\text{Cl}_2/\text{FeCl}_3}$ CC1=C(Cl)C(Cl)=C(Cl)C1

orthoclorotoluen paraclorotoluen 2,4-diclorotoluen

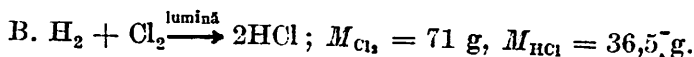
2,4,6-triclorotoluen

226 :

1.12. A. Subiectul se dezvoltă după manualul de clasa a X-a:

Definiție adiție, ca fiind reacția prin care o legătură pi se transformă în legătură sigma. Se întâlnește la sisteme nesaturate: alchene, alchine, arene.

Adiția la alchene, alchine și arene conform manualului. În cazul arenelor, caracterul aromatic (saturat și nesaturat) face posibilă reacția de adiție cît și reacția de substituție. Exemple: adiția H_2 la benzen și adiția H_2 la naftalină, adiția clorului la benzen.



Variantă I.

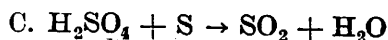
$$n_{Cl_2} = 142/71 = 2 \text{ kmol } Cl_2 \text{ care teoretic dau } 4 \text{ kmol } HCl; m_{HCl} = 4 \cdot 36,5 = 146 \text{ kg}.$$

$$\eta = (m_p/m_t) \cdot 100 = (116,8/146) \cdot 100 = 80\%.$$

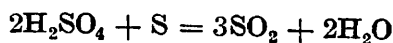
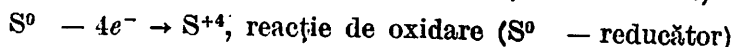
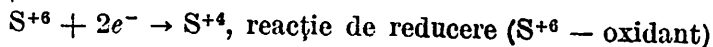
Variantă a II-a.

$$n_{HCl} = 116,8/36,5 = 3,2 \text{ kmol}, n_{Cl_2} = 3,2/2 = 1,6 \text{ kmol}, m_{Cl_2 \text{ necesar}} = 1,6 \cdot 71 = 113,6 \text{ kg}.$$

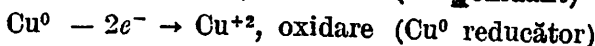
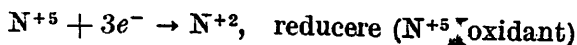
$$\eta = \frac{m_{utila}}{m_{consumata}} \cdot 100 = \frac{113,6}{142} \cdot 100 = 80\%.$$



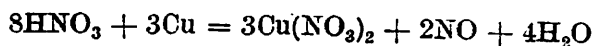
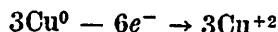
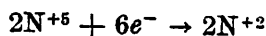
Se determină numerele de oxidare (N.O.) pentru fiecare element. Se observă că sulful are N.O. = +6 în acid sulfuric. Într-adevăr, din $H_2^{+1}S^{+6}O_4^{-2}$ avem $2 + x - 8 = 0 \Rightarrow x = +6$. Analog, în SO_2 sulful are N.O. = +4.



Pentru $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$, azotul are N.O. = +5 în HNO_3 și N.O. = +2 în NO .



Egalăm numărul de electroni:

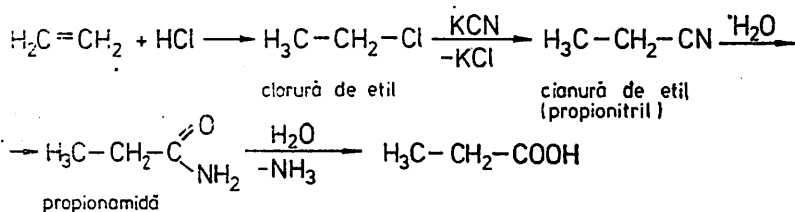


D. Metoda petrochimică, conform cu manualul (alchilarea benzenui, oxidarea cumenului, descompunerea hidroperoxidului de cumen).

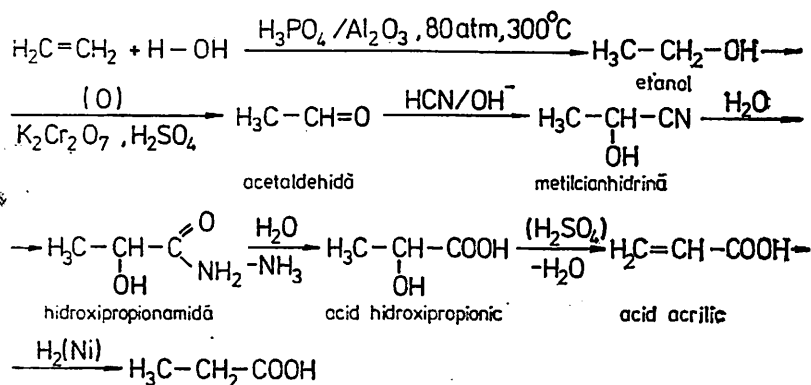
1.13. A. Conform cu manualul de clasa a X-a.

B. $c(\%) = (m_a/m_s)/100$, cu $m_s = m_{Na} + m_{H_2O} = 1000 \text{ g}$ și $m_a = m_{NaOH} + m_{H_2O}$. Dar $m_{NaOH} = c_1 \cdot m_s/100 = 10 \cdot 400/100 = 40 \text{ g NaOH}$ și $m_{H_2O} = c_2 \cdot m_s/100 = 50 \cdot 400/100 = 200 \text{ g NaOH} \Rightarrow m_a = 240 \text{ g NaOH}$.
Rezultă $c = 240 \cdot 100/1000 = 24\%$.

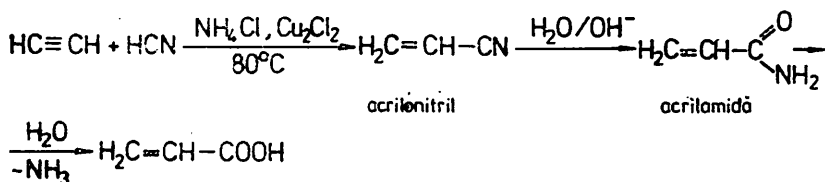
C.a) Varianta I.



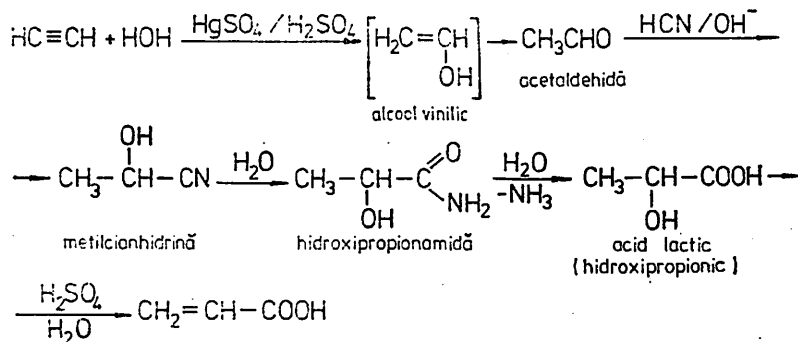
Varianta a II-a.



b) Varianta I.

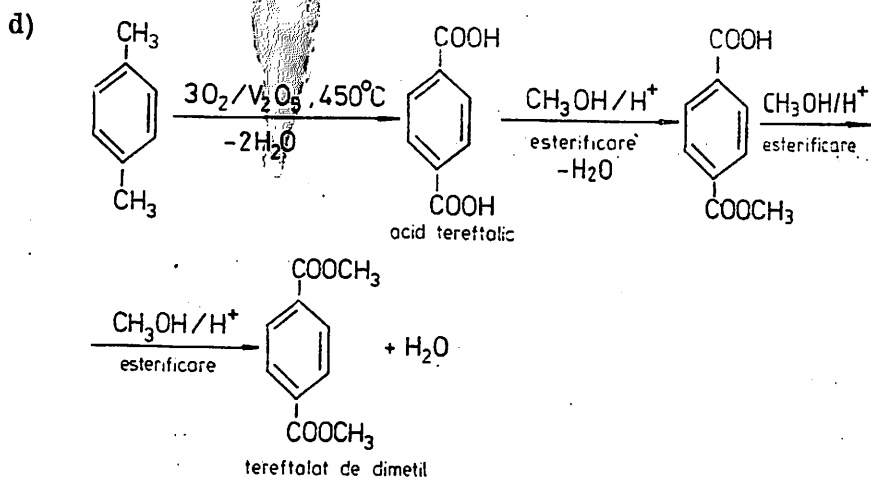
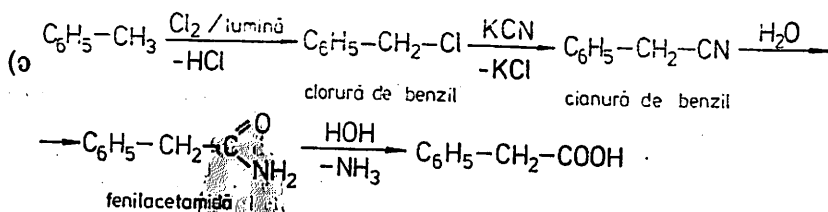
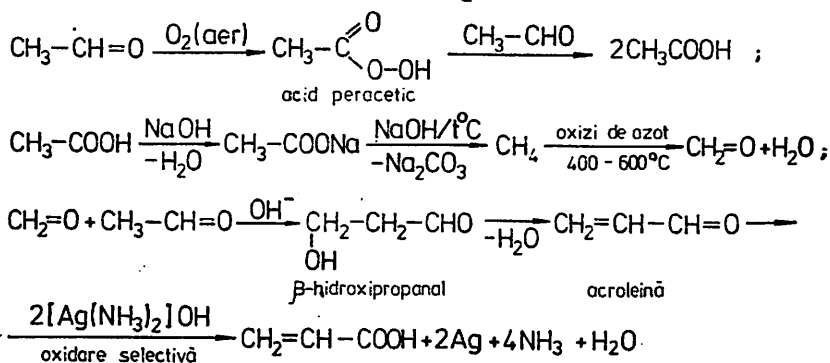


Varianta II-a.

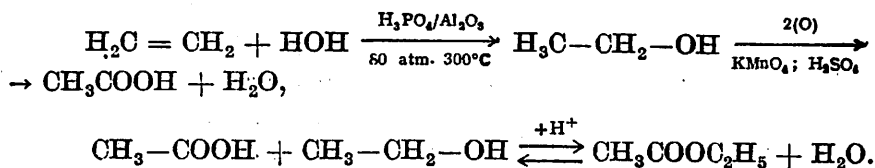


Varianta a III-a.

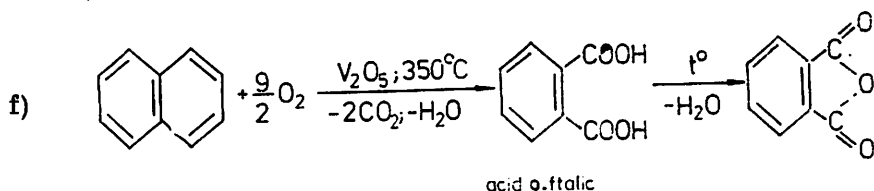
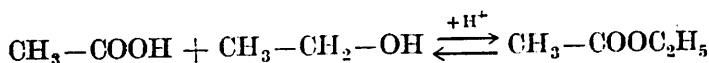
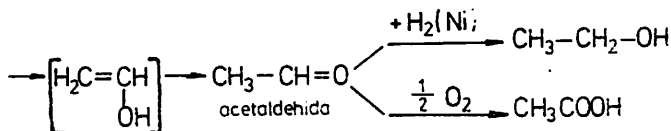
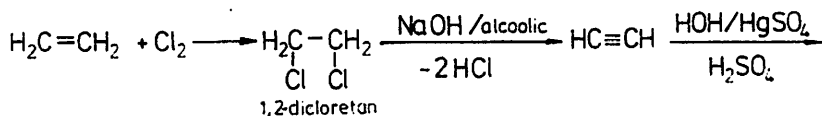
Din C_2H_2 prin reacție Kucarov se obține CH_3CHO .



e) Varianta I.



Variantă a II-a.



I.14. A. Subiectul se dezvoltă conform manualului de clasă a X-a, având în vedere următoarele :

- generalități asupra derivaților halogenați ;
- reacții de substituție la alcani, alchene, alcooli (condiții) ;
- reacție de aditie a halogenilor la alchene ;
- reacția de aditie a hidracizilor halogenilor la alchene ;
- enunțarea legii lui Markovnikov ;
- aditie Br₂ și Cl₂ la alchine ;
- aditie hidracizilor halogenilor la alchine ;
- reacții de aditie și de substituție la benzen ;
- reacții de substituție la toluen la nucleu ;
- reacții de substituție la toluen la catena laterală.

B. Vezi I.6.A.

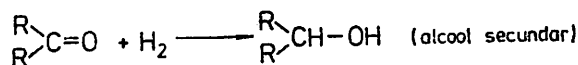
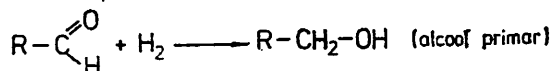
C. Problema se rezolvă conform cerințelor manualului de clasă a IX-a, respectându-se următoarele :

- scrierea reacțiilor la electrozi ;
- scrierea ecuației globale a procesului de electroliză ;
- determinarea masei de CuSO₄ (100 g) și a masei de cupru (40 g) ;
- determinarea volumului de gaz degajat la anod (O₂) : V_{O₂} = 7 l.

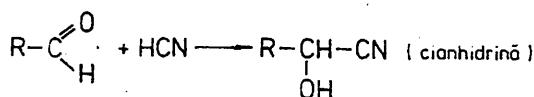
I.15. A. Subiectul A se tratează conform manualului de clasă a X-a, urmărindu-se următoarele aspecte :

1. Reacții de aditie :

a) a hidrogenului, cu indicarea claselor de alcooli ce se obțin ;

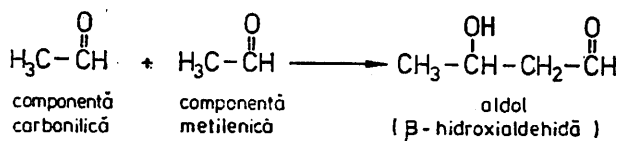


b) a HCN :

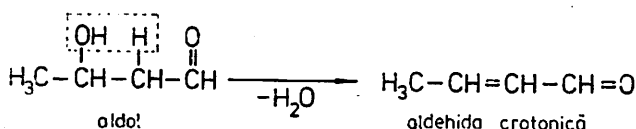


2. Reacții de condensare :

a) aldolică

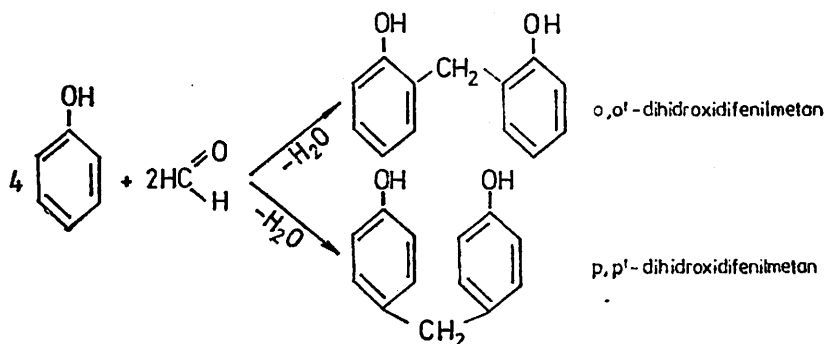


b) crotonică



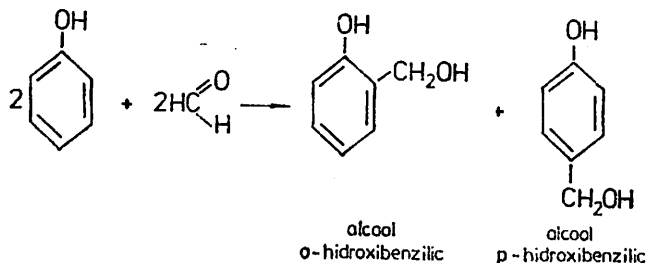
c) cu compuși aromatici :

— condensarea formaldehidei cu fenolul, în mediu acid, conduce mai întâi la dihidroxidifenilmetani :



În continuare, acești intermediari se condensează între ei în pozițiile orto și para ale nucleului benzenic formind un produs macromolecular cu structură filiformă numit novolac.

— condensarea formaldehidei cu fenol, în mediu bazic, la rece, conduce la alcooli hidroxibenzilici :



Prin încălzire pînă la temperatura de 150°C se obține un produs numit rezită sau bachelită C.

Produsii rezultați prin procesul de policondensare a fenolului cu aldehida formică sînt numiți generic fenoplaste și au largi aplicații industriale.

B. a) Se observă că amestecul conține 0,5 moli CO_2 , 1,5 moli CO , 4 moli H_2 și 1 mol N_2 , în total 7 moli. Concentrațiile volumetrice vor fi:

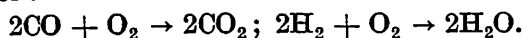
$$c_{\text{CO}_2} = (0,5 \cdot 22,4) / (7 \cdot 22,4) = 7,14\%$$

$$\text{Analog, } c_{\text{CO}} = 21,42\%, c_{\text{H}_2} = 57,14\%, c_{\text{N}_2} = 14,28\%.$$

$$b) \quad M = \frac{n_{\text{CO}_2} \cdot M_{\text{CO}_2} + n_{\text{CO}} \cdot M_{\text{CO}} + n_{\text{H}_2} \cdot M_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2} \cdot M_{\text{N}_2}}{n_{\text{amestec}}} = 14,28 \text{ g.}$$

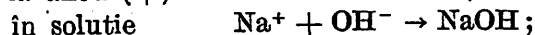
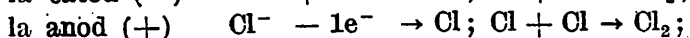
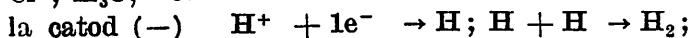
$$d = M/22,4 = 0,64 \text{ g/l}; d/d_{\text{aer}} = M/28,9 = 0,49.$$

c) Din cele 4 gaze componente ale amestecului ard doar CO și H_2 conform ecuațiilor:

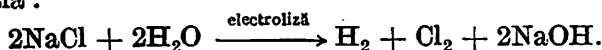


Se vor consuma $0,75 + 2 = 2,75$ moli O_2 , adică $2,75 \cdot 22,4 \text{ l } \text{O}_2$ (c.n.). Întrucît aerul conține 20% O_2 în volume, volumul de aer va fi de 5 ori volumul de O_2 : $5 \cdot 2,75 \cdot 22,4 = 308 \text{ l aer}$ (c.n.).

d) În soluția de NaCl sînt prezente următoarele specii ionice: Na^+ , Cl^- , H_3O^+ , OH^-



ecuația globală:



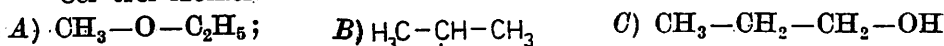
Amestecul conține 4 moli H_2 , pentru care sînt necesari 8 moli NaCl ($8 \cdot 58,5 = 468 \text{ g NaCl}$) care sînt conținuți în 1,33 l soluție NaCl 6M.

C. a) Avînd în vedere că 60% este C, masa de carbon din moleculă-gram a substanței este $60 \cdot 60/100 = 36 \text{ g}$, ceea ce revine la $36/12 = 3$ atomi-gram de carbon. Restul masei moleculare $60 - 36 = 24$ revine oxigenului și hidrogenului. Avem sistemul:

$$\begin{cases} m_{\text{O}} + m_{\text{H}} = 24 \\ m_{\text{O}}/m_{\text{H}} = 2/1 \Rightarrow m_{\text{O}} = 16 \text{ g}, m_{\text{H}} = 8 \text{ g} \Rightarrow n_{\text{O}} = 16/16 = 1, n_{\text{H}} = 8/1 = 8 \end{cases}$$

și formula substanței este $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$.

Cei trei izomeri sînt:



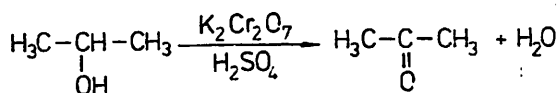
metiletileter

2 - propanol

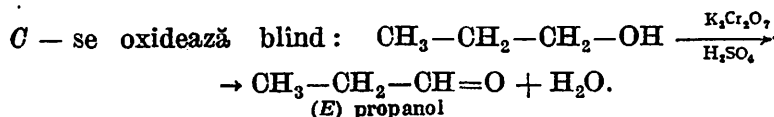
n-propanol

A — nu se oxidează și nu hidrolizează;

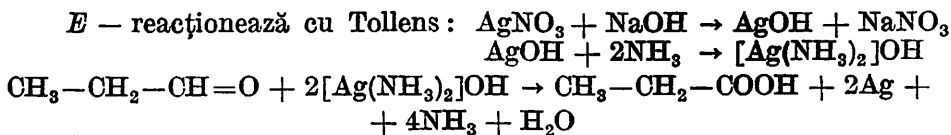
B — se oxidează blînd:



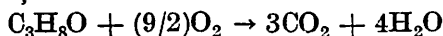
(D) acetona



(E) propanol

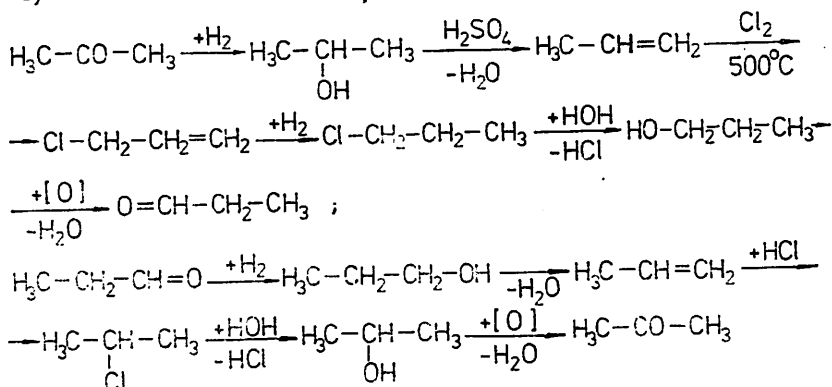


b) Ecuația reacției de ardere este:



Pentru 12 g izomer A sînt necesare $9 \cdot 16 \cdot 12/60 = 28,8$ O_2 , adică 20,16 l O_2 (c.n.) sau 100,8 l aer (c.n.).

c) Transformările $D \rightarrow E$ și $E \rightarrow D$:



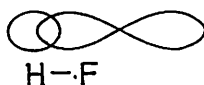
I.16. A. Legătura covalentă în care electronii puși în comun nu sînt distribuiți egal, între cei 2 atomi → legătură covalentă polară.

Molecula respectivă → moleculă polară.

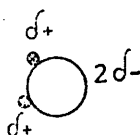
— Exemple de molecule cu legături covalente polare:

H—F (dipol $\delta^+ \delta^-$ — cu fluorul negativ (δ^-) și H pozitiv (δ^+))
 (notația δ pentru sarcini parțiale)

— Orbitalul de legătură la formarea HF



— H_2O și modelul spațial



• — hidrogen

(eventual alte exemple: H_2S , NH_3 , HCl)

— Variația polarității moleculei la hidracizii halogenilor

$\text{HI} \quad \text{HBr} \quad \text{HCl} \quad \text{HF}$
 → crește polaritatea.

— Încadrarea legăturii covalente polare între legătura covalentă nepolară și legătura ionică.

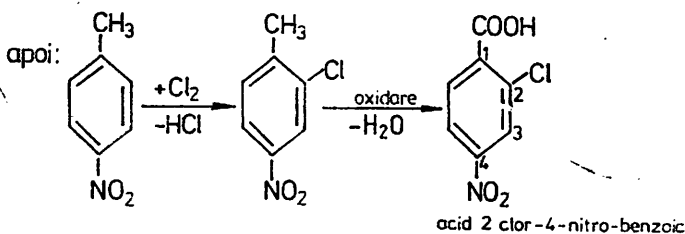
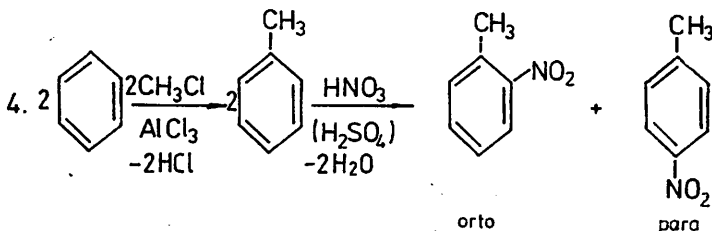
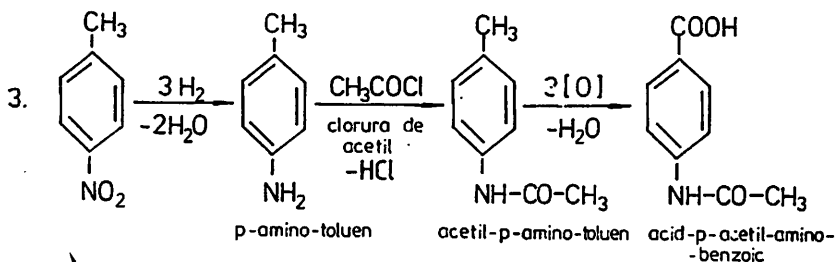
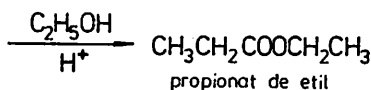
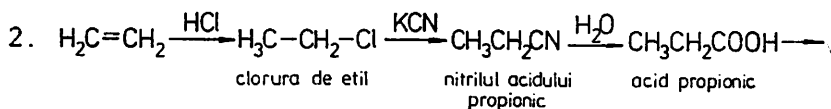
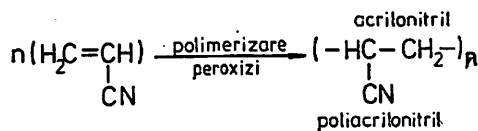
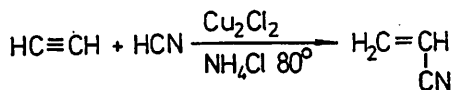
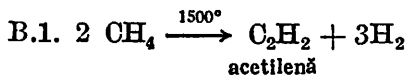
exemplu: F—F	H—F	Na^+F^-
covalentă	covalentă	legătură
nepolară	polară	ionică

— Interacții: legătură de hidrogen exemple: HF , H_2O

— formarea de asociații moleculare $(\text{H}_2\text{O})_n$, $(\text{HF})_n$

— Interacții: legătură dipol-dipol exemple: HCl , HBr , H_2O

— mai slabă ca legătura de hidrogen.



C.1. determinăm cantitatea totală de KOH

sol	1 m	56 g KOH	1000 cm ³ sol
	0,5 m	28 g KOH	1000 cm ³ sol
		x g	400 cm ³ sol

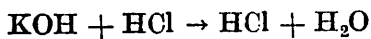
$$x = 28 \cdot 400 / 1000 = 11,2 \text{ g KOH};$$

— cantitatea de HCl pentru neutralizare

sol	7,3% HCl	7,3 g HCl	100 g sol
		x g HCl	40 g sol

$$x = 7,3 \cdot 40 / 100 = 2,92 \text{ g HCl};$$

— reacția de neutralizare



$$M = 56 \quad M_{\text{HCl}} = 36,5$$

$$\begin{array}{l} 56 \text{ g KOH neutralizate de } \dots \dots \dots 36,5 \text{ g HCl} \\ x \dots \dots \dots 2,92 \text{ g HCl} \end{array}$$

$$x = 56 \cdot 2,92 / 36,5 = 4,48 \text{ g KOH reprezintă excesul ;}$$

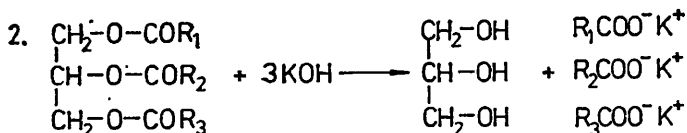
— KOH utilizat la hidroliză :

$$\text{KOH total} - \text{KOH exces} = 11,2 - 4,48 = 6,72 \text{ g KOH ;}$$

— masa de KOH pentru hidroliza a 1 g grăsime

$$\begin{array}{l} 34,4 \text{ g grăsimi } \dots \dots \dots 6,72 \text{ g KOH} \\ 1 \text{ g grăsime } \dots \dots \dots x \end{array}$$

$$x = 6,72 / 34,4 = 0,195 \text{ g KOH.}$$



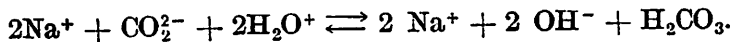
unde R_1, R_2, R_3 — resturi de acizi grași (pot fi diferiți între ei).

I.17. A. Reacția între ionii sării și ionii apei la dizolvarea sării în apă.

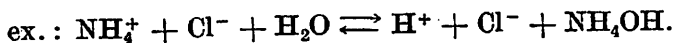
— Hidroliza este reversibilă.

— Hidroliza este inversul neutralizării.

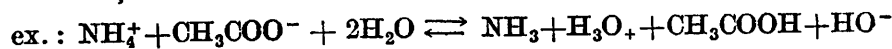
— Sărurile din acizi slabi și baze tari dau la hidroliză soluție slab bazică, ex. :



— Sărurile din acizi tari și baze slabe dau la hidroliză soluție slab acidă :



— Sărurile din baze slabe și acizi slabi hidrolizează mai ușor ca celelalte, iar soluția este slab acidă sau slab bazică :

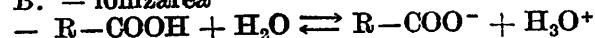


— Sărurile din acizi tari și baze tari practic nu hidrolizează

— Grad de hidroliză = nr. molecule de sare hidrolizate / nr. molecule de sare dizolvate.

— Depinde de natura sării, concentrație, temperatură.

B. — ionizarea



— tăria acidă (mai slabi ca acizii minerali)

— schimbă culoarea indicatorilor (turnesol, metilorange)

— eliberează acizii mai slabi din sărurile acestora

exemple : — reacția cu NaHCO_3 ,

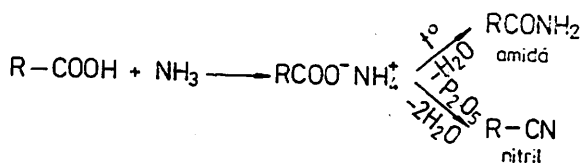
— reacția cu NaCN ,

— reacția cu $\text{C}_6\text{H}_5\text{-ONa}$;

— reacția cu metale active, oxizi și baze

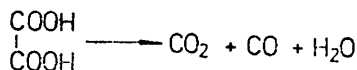
exemplu: — reacția cu Zn,
— reacția cu CaO,
— reacția cu KOH;
— transformări în derivați funcționali:
— esterificarea $\text{RCOOH} + \text{R}'\text{OH} \rightleftharpoons \text{R}-\text{COOR}' + \text{H}_2\text{O}$

— reacția cu NH_3



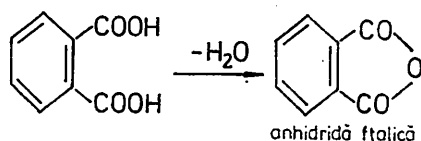
— decarboxidare

exemple : $\text{HCOOH} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2$



— deshidratarea acizilor dicarboxilici

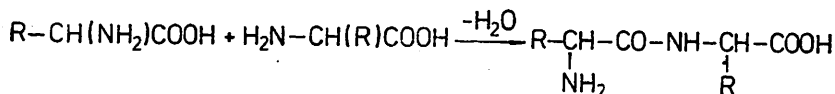
exemplu :



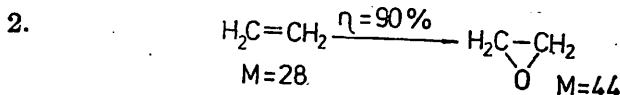
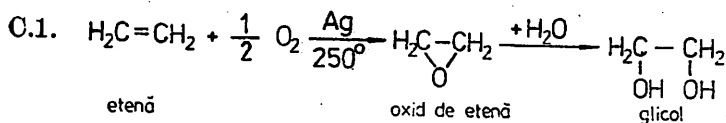
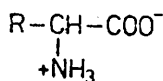
— acilarea aminelor

— reacțiile aminoacizilor: la grupa carboxil

— formarea peptidelor



— ionizarea la amfioni:



28 kg etenă	22,4 m ³ (c.n.) etenă
x	2000 m ³

$$C_t = x = 28 \cdot 2\,000 / 22,4 = 2\,500 \text{ kg etenă,}$$

28 kg etenă 44 kg oxid de etenă
 2500 kg etenă x

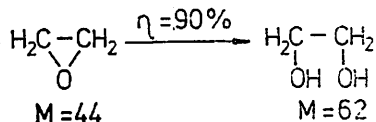
$$C_t = x = 2500 \cdot 44/28 = 3928,57 \text{ kg oxid de etenă.}$$

$$\eta = (C_p/C_t) \cdot 100 \Rightarrow C_p = \eta \cdot C_t/100.$$

Dar $\eta = 90\%$. Deci oxid de etenă obținut practic :

$$C_p = 3928,57 \cdot (90/100) = 3535,71 \text{ kg oxid de etenă.}$$

3.



44 kg oxid de etenă 62 kg glicol
 3535,71 kg oxid de etenă x

$$C_t = x = 4982,13 \text{ kg glicol}$$

$$\eta = (C_p/C_t) \cdot 100, C_p = \eta \cdot C_t/100.$$

$$C_p = 4982,13 \cdot (90/100) = 4483,91 \text{ kg glicol.}$$

4.

$$\begin{array}{l} \text{H}_2\text{C}-\text{CH}_2 \quad \text{C}_2 \rightarrow 2 \cdot 12 = 24 \text{ g} \rightarrow x = (24/62) \cdot 100 \\ | \quad | \\ \text{OH} \quad \text{OH} \quad \text{H}_6 \rightarrow 6 \cdot 1 = 6 \text{ g} \rightarrow y = (16/62) \cdot 100 \\ (\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2) \quad \text{O}_2 \rightarrow 2 \cdot 16 = 32 \text{ g} \rightarrow z = (32/62) \cdot 100 \\ x = 38,71 \% \text{ C} \end{array}$$

adică

$$\begin{array}{l} y = 9,67\% \text{ H} \\ z = 51,61\% \text{ O} \\ \hline x + y + z = 99,99\%. \end{array}$$

II. SUBIECTE de examen propuse 238-243

Indicații și răspunsuri 244-255

II.1. Care este molaritatea unei soluții saturate de azotat de potasiu la 25°C, dacă la această temperatură solubilitatea azotului de potasiu este 32,2 g ($d_{s01} = 1$ g/ml).

II.2. Calculați solubilitatea azotatului de potasiu la 25°C cunoscând următoarele date experimentale : masa vasului 40,88 g, masa vasului cu soluție saturată 58,37 g și masa vasului cu reziduu după evaporarea apei 45,14 g.

II.3. Un chimist determină prin electroliză masa atomică a unui metal X . Se știe că acest metal dă clorură de forma XCl_2 și 0,03042 g din acest metal se depun cînd trec prin soluție 100 C. Care este metalul ?

II.4. Se electrolizează o soluție de clorură de sodiu. Dacă se iau în lucru 500 ml soluție 0,1 moli/l de clorură de sodiu și intensitatea curentului este de 2 A, iar timpul de electroliză este de 1930 s, se cere :

- a) ecuația reacției de electroliză ;
- b) concentrațiile finale $[Na^+]$, $[Cl^-]$, $[OH^-]$ și $[H^+]$.

II.5. Un amestec de 30 g format din KCl și clorat de potasiu conține 3% clorură de potasiu. Câți atomi de oxigen se găsesc în acest amestec ?

II.6. La 20°C, într-un cilindru de 100 ml se găsesc 90 ml apă cu densitatea 0,998 g/ml. Se adaugă metanol pînă la nivelul de 100 ml. Masa soluției crește cu 8,8 g și densitatea soluției devine 0,986 g/ml.

- a) Care este concentrația procentuală a alcoolului în apă ?
- b) Care este fracția molară a amestecului ?
- c) Care este molaritatea soluției ?

II.7. Cu 120 ml dintr-o soluție de azotat de argint 0,015 M se poate precipita bromul din 75 ml soluție de bromură de sodiu 0,01 M și iodul din 50 ml soluție iodură de bariu. Care este molaritatea soluției de iodură de bariu ?

II.8. Un volum de 10 ml soluție acid clorhidric precipită argintul dintr-o soluție de 50 ml azotat de argint. Aceeași cantitate de soluție neutralizează 12 ml soluție de amoniac 0,1 M. Care este molaritatea soluției de azotat de argint ?

II.9. Cîtă clorură ferică conține 20 ml soluție 40% de densitate $d = 1,133$ g/ml ? Care este concentrația soluției exprimată în procente de moli ?

II.10. Ce cantitate de sulfat feros $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ se poate obține dintr-un litru de soluție 12% sulfat feros anhidru cu $d = 1,122$ g/ml ?

II.11. Solubilitatea iodurii de plumb la 18°C este $2 \cdot 10^{-3}$ mol/l. În cîtă apă se va dizolva 1 g iodură de plumb la această temperatură ?

II.12. Acidul sulfuric comercial are densitatea 1,81 g/ml și concentrația 67%. Din acest acid se prepară 1 l de soluție astfel încît 25 ml din soluție să se neutralizeze cu 12 ml soluție 0,1 N hidroxid de sodiu.

- a) Ce cantitate de acid se găsește în soluția preparată de 1 l?
- b) Ce volum de acid comercial s-a utilizat pentru prepararea soluției de mai sus?

II.13. O cantitate de 50 g calcar se tratează cu 200 g soluție de HCl de concentrație 14,6%. Excesul de acid clorhidric este neutralizat de 100 ml soluție NaOH 2N. Se cere puritatea probei de analizat.

II.14. 10 g amestec pulbere de magneziu și de cupru se tratează cu 0,5 l soluție acid clorhidric de concentrație 2 N. Știind că se degajă 4,48 l dintr-un gaz, măsurat la 0°C și 1 atm, se cere:

- a) scrierea ecuației reacției;
- b) compoziția amestecului din problemă, în g și în procente.

II.15. O hidrocarbură saturată aciclică *A*, gazoasă, care are densitatea relativă față de CO₂ egală cu 1, se supune dehidrogenării rezultînd un compus *B* care va reacționa cu o substanță *C* obținută prin reacția directă a hidrogenului cu elementul chimic a cărui atom are 17 protoni în nucleu.

- a) Identificați substanțele *A*, *B*, *C* și scrieți ecuațiile reacțiilor.
- b) Dacă reacția de obținere a lui *B* are loc cu un randament de 80%, aflați ce volum de substanță *B* se obține dacă se pleacă de la 200 kg substanță *A* de puritate 44%.
- c) Cu ce randament s-a lucrat la obținerea produsului *C* dacă s-a obținut o cantitate de produs *C* exact necesară pentru a reacționa cu întreaga cantitate de produs *B* și s-a plecat de la 44,8 m³ hidrogen?

II.16. 336 m³ metan, măsurați în condiții normale, se supun descompunerii termice în arc electric; 2/3 din volumul de metan va conduce la o hidrocarbură *A*, iar restul se va descompune în elemente. Jumătate din cantitatea de hidrocarbură *A* va reacționa cu apa, rezultînd în final o substanță *B*. Cealaltă jumătate din cantitatea de hidrocarbură *A* va reacționa cu HCl dînd o substanță *C* cu un randament de 90%. Substanța *B* obținută este trecută în soluție, iar pentru stabilirea concentrației acestei soluții, 10 g de soluție se tratează cu reactivul Tollens depunîndu-se 21,6 Ag.

- a) Identificați substanțele *A*, *B*, *C* și scrieți ecuațiile reacțiilor chimice din problemă.
- b) Calculați cantitatea de substanță *B* obținută.
- c) Calculați cantitatea de substanță *C* obținută și precizați importanța ei industrială.
- d) Aflați concentrația soluției de substanță *B*.

II.17. Un mol de compus aromatic mononuclear se oxidează la catena laterală cu permanganat de potasiu soluție slab bazică, conducînd la un mol de acid benzoic, un mol CO₂ și un mol apă.

Identificați compusul și propuneți o metodă de obținere a lui pornind de la metan ca singura sursă de materie organică.

II.18. Se dau numerele atomice $Z_1 = 85$ pentru astatiniu (At), $Z_2 = 86$ pentru radon (Rn) și $Z_3 = 87$ pentru franciu (Fr).

- a) Care sînt configurațiile lor electronice și să se specifice unde se află electronul distinctiv.

b) Din ce grupe de elemente fac parte și ce caracteristici generale au : valența, caracterul chimic, caracterul electrochimic, formulele oxizilor, bazelor sau ale acizilor (după caz).

II.19. Să se reprezinte legăturile chimice, specificându-se și tipul legăturii, tipul de cristale pe care îl formează fiecare dintre substanțele următoare, aflate în stare solidă : (a) carbura de aluminiu ; (b) hidrogenul sulfurat ; (c) hidrura de potasiu ; (d) etanolul ; (e) acrilonitril.

II.20. Se dă șirul de transformări chimice :



a) Identificați substanțele $a \dots j$ și scrieți ecuațiile reacțiilor știind că c , e , f sint gaze ale căror densități în raport cu aerul au valorile 0,069, 0,968, 0,588.

b) Ce cantitate de substanță j se obține dacă se pleacă de la 56 l de substanță c , măsurați în condiții normale, iar transformările chimice (5) au loc cu randamentul global de 90%.

c) Ce cantitate de substanță a s-a folosit pentru obținerea celor 56 l de substanță c ?

d) Să se prezinte importanța practică a reacției (3).

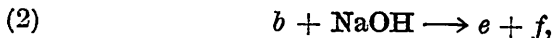
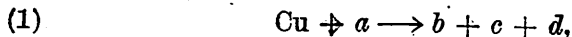
II.21. a) Să se obțină acidul metil malonic (metil propan-dioic) plecând de la acetilenă ca singura sursă de materie organică.

b) Să se propună două metode pentru obținerea acetaldehidei folosindu-se acetilenă ca singura sursă de materie organică.

c) Să se prezinte două metode de obținere a etilaminei, plecând de la metan ca singura sursă de materie organică.

H.22. 200 g soluție de concentrație 3% dintr-un acid monocarboxilic saturat se neutralizează cu 50 ml soluție de hidroxid de sodiu 2 N. Să se identifice acidul și să se scrie reacția și denumirile izomerilor.

II.23. Se dă șirul de transformări chimice :



a) Să se identifice substanțele $a \dots i$ știind că a este un acid având compoziția procentuală 32,62% S, 65,31% O și restul hidrogen.

b) Să se calculeze cantitățile de substanțe g și h obținute dacă se pleacă de la 12,8 g Cu.

c) Știind că soluția acidului α conține 10 moli ioni de hidrogen și 3 moli acid neionizat, să se afle gradul de ionizare al acestei soluții.

d) Ce caracter are soluția preparată prin dizolvarea în apă a compusului h știind că s-a determinat o concentrație molară de ioni de hidrogen $[H_3O^+] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ moli/l}$.

II.24. Un amestec gazos format din metan și acetilenă, de 44,8 l, măsurat în condiții normale, se trece printr-o soluție de clorură diamino $Cu(I)$, rezultând 0,228 g precipitat. Să se calculeze compoziția amestecului în procente de volume și de masă.

II.25. 250 ml soluție de sulfat de cupru 1 M sînt turnați într-un vas în care se află o plăcuță de fier. După un timp, plăcuța uscată și cîntărită are 12 g. Care era masa inițială a plăcuței?

Se consideră că întreaga cantitate de sulfat feros a reacționat.

II.26. Masa moleculară a unei cloruri acide A din seria aromatică este cu 13,6% mai mare față de cea a acidului monocarboxilic corespunzător B , de la care provine.

Să se identifice substanțele A și B .

Să se scrie și să se denumească izomerii disubstituiți ai ambelor substanțe.

II.27. Cloratul unui metal alcalin pierde prin descompunere termică 45,07% din greutatea sa. Care este metalul, formula cloratului și ecuația reacției de descompunere termică în prezența piroluzitei. Ce volum de gaz, în condiții normale, se obține dacă se folosesc 220 g clorat cu 96,8% puritate și pierderile sînt de 10%.

II.28. O probă dintr-un aliaj format din argint și cupru conține 22,86% cupru. Se tratează această probă cu o soluție de acid azotic și se degajă 2,986 l gaz în condiții normale.

Ce masă are proba din aliaj și care este raportul între numărul atomilor de cupru și numărul atomilor de argint din aliaj?

II.29. Un amestec format din zinc și sulf este puternic încălzit. Compusul solid care rezultă este tratat cu acid clorhidric formînd 2,4 l gaz. Ce compoziție procentuală are amestecul?

II.30. O cantitate de 16,8 g dintr-un carbonat alcalino-pămîntos scade în greutate cu 52,38% prin calcinare. Să se identifice metalul și să se stabilească compoziția carbonatului.

II.31. La presiunea atmosferică și la $0^\circ C$, într-un litru de apă se dizolvă 500 l HCl gaz, iar la $20^\circ C$, 440 l acid gazos.

Care este concentrația procentuală a soluției la $20^\circ C$ știind că soluția are densitatea 1,21 g/ml și care este solubilitatea acidului exprimată în grame în ambele cazuri.

II.32. Un amestec echimolecular de două gaze care au aceeași masă moleculară, se supune combustiei, iar gazele rezultate din combustie se trec printr-un vas cu $Ca(OH)_2$ depunîndu-se un precipitat care după spălare și uscare cîntărește 80 g.

Dacă se trece amestecul, înainte de a fi supus combustiei, printr-un alt vas cu $Ca(OH)_2$ se constată depunerea unui precipitat, care după spălare și uscare, cîntărește 20 g.

Știind că unul din compuşii amestecului este o hidrocarbură, să se stabilească :

- a) componentii amestecului ;
- b) ecuațiile reacțiilor chimice din problemă ;
- c) volumul de aer, în condiții normale, necesar arderii (combustiei) amestecului.

II.33. Se dă șirul de transformări :

- (1) $a + b \longrightarrow c,$
- (2) $c + O_2 \longrightarrow d + H_2O,$
- (3) $d + O_2 \longrightarrow e,$
- (4) $e + H_2O \longrightarrow f + d,$
- (5) $f + g \longrightarrow h + H_2O.$

Se cunoaște că a și b sînt două elemente chimice aflate în perioadele 1 și 2 ale sistemului periodic, între ale căror mase atomice este raportul $1/14$, iar g este o hidrocarbură avînd raportul $C : H = 1 : 1$ și masa moleculară 78.

a) Identificați substanțele notate prin literele $a \dots h$.

b) Ce cantitate de substanță h se formează pornind de la 8,4 g substanță b , dacă primele trei reacții din schemă decurg cantitativ, iar ultimele două reacții au fiecare randamentul de 90%.

II.34. Un amestec de 72 g conținînd hidrogen și 2 alcani gazoși omologi are un volum de 100,8 l (c.n.)

Știind că cei 2 alcani din amestec se află în raportul molar 1 : 4 în favoarea alcanului superior, că hidrogenul molecular din amestec, separat, ar permite reducerea a 106,66 g oxid feric și că conținutul procentual (în % masă) al hidrogenului din amestecul dat este a %, determinați :

- a) Compoziția în grame, moli și litri a amestecului.
- b) Frația molară a hidrogenului gazos din amestec.
- c) Volumul de aer (c.n.) (cu 20% O_2) care ar arde amestecul dat cu un randament de 80%.
- d) Determinați valoarea lui a .

II.35. În 98 g soluție de acid sulfuric de concentrație 10% se introduce șpan de cupru pînă la consumarea totală a acidului. Soluția rezultată se filtrează și se evaporă la sec și se aduce în 32 g apă, obținîndu-se o soluție I. Peste aceasta se adaugă 160 g soluție II de $CuSO_4$ avînd concentrația 40%.

Se cere :

- a) Scrieți ecuația reacției dintre cupru și acid sulfuric și interpretați-o ca proces redox.
- b) Concentrația soluției I.
- c) Concentrația soluției rezultate prin amestecarea soluțiilor I și II.
- d) Masa de apă ce trebuie evaporată spre a mări concentrația după evaporare a soluției finale la 60%.
- e) Volumul de hidrogen sulfurat măsurat la $27^\circ C$ și 1,5 atm ce trebuie barbotat prin 200 g amestec soluție I + II și explicarea procesului chimic ce are loc.

II.36. 201,6 cm^3 (c.n.) alcan, cu densitatea față de bioxidul de carbon 1, se trece peste un catalizator Al_2O_3/Cr_2O_3 cu un randament de 75%. Gazele rezultate se trec peste burete de Pt care reține cantitativ componentul A, iar componentul B se trece printr-un volum de soluție de $K_2Cr_2O_7/H_2SO_4$

de concentrație 0,5 m. Din această soluție rezultă un component gazos C,

Se cere :

a) Stabiliți alcanul și componenții A, B, C.

b) Scrierea ecuațiilor chimice din problemă și interpretarea lor ca proces redox.

c) Cantitățile și volumele (c.n.) din componenții A, B, C și volumul V al soluției de $K_2Cr_2O_7$.

II.37. Un compus A conține 47,36% C și 10,52% H. Densitatea vaporilor săi față de hidrogen este 38.

1. Să se stabilească structura și numele compusului A dacă se cunoaște că prin oxidarea sa se obține un diacid.

2. Să se scrie ecuația reacției substanței A cu anhidrida acetică și să se denumească produsul de reacție.

3. Să se scrie și să se denumească izomerii substanței A.

4. Să se scrie ecuațiile reacțiilor prin care se obține substanța A din metan.

II.38. Un compus A saturat aciclic conține 38,37% clor.

1. Să se determine formula moleculară a compusului A.

2. Să se scrie izomerii și denumirile lor.

3. Să se stabilească formula compusului A dacă se obține din hidrocarbura corespunzătoare cu cel mai scăzut punct de fierbere.

4. Să se scrie ecuațiile reacțiilor prin care A se transformă în acidul B cu un atom de carbon în plus și în amina C cu catena nemodificată.

II.39. Din 2 t de pirită de puritate 60% se obține dioxid de sulf cu un randament de 80%. Dioxidul de sulf este transformat în acid sulfuric sub formă de soluție în greutate de 1 400 kg de concentrație necunoscută. Pentru a se stabili concentrația se precipită 100 g soluție cu $BaCl_2$, obținându-se 233 g precipitat alb. Se cere :

1. Scrierea ecuațiilor tuturor reacțiilor.

2. Determinarea randamentului cu care a fost absorbit trioxidul de sulf cu apă.

II.40. 1) Știind că un gaz A are densitatea la 30°C și 2 atm de 3,539 g/l să se identifice masa moleculară a acestui gaz.

2) Să se determine formula dacă se știe că în molecula gazului se găsesc doi atomi de oxigen.

II.41. Reacția de esterificare a acidului acetic cu etanolul are constanta de echilibru egală cu 5 pentru o temperatură dată. Făcînd să reacționeze 0,4 moli de etanol cu un randament de 90% se cere :

1. Numărul de moli de acid acetic introdus în reacție.

2. Numărul de moli de acid acetic rămas nereacționat la echilibru.

II.42. Fosfatul disodic din comerț este un cristalohidrat. Determinați formula cristalohidratului dacă 32,2 kg sare hidratată conține 14,2 kg sare anhidră.

II.43. Un număr de $0,2492 \cdot 10^{23}$ molecule dintr-un halogen are masa de 6,56 g. Această cantitate de halogen formează cu un metal divalent 8,966 g sare. Se cere :

1. Numele halogenului și formula sării.

2. Configurația electronică a ionului.

3. Formula și denumirea substanței complexe a acestui ion obținută prin cianurare.

II. Subiecte de examen propuse 238-243

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 244-255

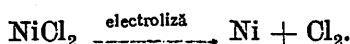
II.1. 2,41 molar.

II.2. 32,2 g.

II.3. Indicație :

$$96\,500/100 = E_{\text{metal}}/0,03042, E = 29,355 \text{ g},$$

$$M_{\text{metal}} = 29,355 \cdot 2 = 58,71 \text{ g Ni},$$



II.4. Indicație :

Inițial în soluție există 0,05 moli Cl^- /0,5 l și 0,05 moli/0,5 l Na^+ .

Prin electroliză se formează 0,04 moli/ Na^+OH^- , deci $[\text{OH}^-] = 0,04 \text{ moli}/0,5 \text{ l} = 0,08 \text{ moli OH}^-$.

$$[\text{Cl}^-] = 0,05 - 0,04 = 0,01 \text{ moli Cl}^-/0,5 \text{ l} = 0,02 \text{ moli/l},$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-14}/4 \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ moli}/0,5 \text{ l},$$

adică $5 \cdot 10^{-13} \text{ moli/l}$.

II.5. $4,29 \cdot 10^{23}$ atomi.

II.6. $m_{\text{H}_2\text{O}} = 89,8 \text{ g}$, $C = 8,9\%$.

a) $m_{\text{sol}} = 98,6 \text{ g}$;

b) $n_{\text{H}_2\text{O}} = 4,988$,

$$n_{\text{CH}_3\text{OH}} = 8,8/32 = 0,275,$$

$$X_{\text{CH}_3\text{OH}} = 0,275/5,263 = 0,0522;$$

c) 2,75 m.

II.7. $1,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

II.8. $2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

II.9. 9,064 g FeCl_3 , 0,0557 moli FeCl_3 , 13,596 g H_2O , $n = 0,7553 \text{ moli}$, 6,79% moli FeCl_3 .

II.10. 246,24 g $\text{FeSO}_4 \cdot 7 \text{ H}_2\text{O}$.

II.11. 1,084 l.

II.12. $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2 \text{ NaOH} = \text{Na}_2\text{SO}_4 + 2 \text{ H}_2\text{O}$

Se consumă $0,6 \cdot 10^{-3} \text{ moli H}_2\text{SO}_4/25 \text{ ml soluție}$:

a) 2,352 g/l l sol;

b) 1,339 ml sol.

II.13. $m_{\text{HCl}} \text{ exces} = 7,3 \text{ g}$,

$m_{\text{HCl}} \text{ reactionat} = 21,9 \text{ g}$, puritate = 60%.

II.14. b) 48% Mg, 52% Cu.

II.15. $\text{C}_3\text{H}_8(\text{A})$:

a) $\text{C}_3\text{H}_8(\text{B})$, $\text{HCl}(\text{O})$;

b) 35,84 m³ B;

c) 40%.

II.16.a) (A) C_2H_2 , (B) CH_3CHO , (O) $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{Cl}$;

b) 110 kg B;

c) 140,625 kg;

d) 44%.

II.17. $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$ (indicație: $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{C}_n\text{H}_{2n+1} + 3n \text{ O} \xrightarrow[\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{COOH}]{\text{KMnO}_4} = (n-1) \text{ CO}_2 + n \text{ H}_2\text{O}$.

1 mol CO_2 : $n - 1 = 1$; $n = 2$

II.18. a) At: 1 s^2 ; 2 $s^2 p^6$; 3 $s^2 3p^6$; 4 $s^2 3 d^{10} 4p^6$; 5 $s^2 4 d^{10} 5p^6$; 6 $s^2 f^{14}$; 5 $d^{10} 6 p^6$.

$K = 2e^-$; $L = 8e^-$; $M = 18e^-$; $N = 18e^-$; $O = 32e^-$; $N = 7e^-$.

Este un halogen: astatiniu. Electronul distinctiv se află în substratul p.

Rn: 1 s^2 ; 2 $s^2 p^6$; 3 $s^2 p^6$; 4 $s^2 3 d^{10} 4p^6$; 5 $s^2 4 d^{10} 5 p^6$; 6 $s^2 4 f^{14} 5 d^{10} 6p^6$.

$K = 2e^-$; $L = 8e^-$; $M = 18e^-$; $N = 18e^-$; $O = 32e^-$; $N = 8e^-$.

Deci electronul distinctiv se află în substratul p.

Fr: 1 s^2 ; 2 $s^2 p^6$; 3 $s^2 p^6$; 4 $s^2 3 d^{10} 4 p^6$; 5 $s^2 4 d^{10} 5 p^6$; 6 $s^2 4 f^{14} 5 d^{10}$; 6 p^6 ; 7 s^2

Electronul distinctiv se află în substratul s.

b) At: Grupa a VII-a, perioada a 6-a.

Valența:

— negativă, -1

— covalența, 1

— valența pozitive: +1, +3, +5, +7.

Caracter nemetalic mai puțin pronunțat decât ceilalți halogeni, electroenergetic mult mai slab decât fluorul: HAt: hidroacid; HAtO, HAtO₃; HAtO₂, HAtO₄:oxiacizi.

Rn: Grupa a VIII-a, perioada a 6-a.

Gaz rar, inert, fără capacitatea de a reacționa, nu are valență.

Fr: Grupa I, perioada a 7-a, valența numai +1.

Electropozitiv puternic, metal puternic.

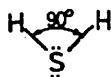
Fr₂O oxid bazic, Fr(OH) bază puternică Fr⁺H⁻, hidrură ionică.

II.19. a) Este formată din două elemente cu caractere chimice net diferențiate (metal și nemetal), carbura de aluminiu are legături ionice.

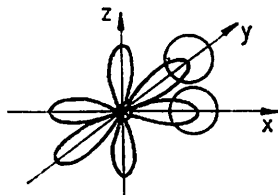
Al_4C_3 : 4 Al^{3+} 3 C^{4-}

Cristale ionice cu forțe electrostatice.

b) H_2S format din două nemetale are legături covalente polare.



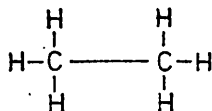
Unghiul dintre covalențele de hidrogen este de 90° . Deci fiecare legătură $\text{S}-\text{H}$ este o legătură formată din orbitali s și p ai sulfului.



H_2S este un dipol $\text{H}_2^{+28}\text{S}^{-28}$. Formează cristale moleculare cu forțe dipol-dipol.

c) KH formată din metal și nemetal are legături ionice K^+ și H^- (ionul hidrură).

d) Are cristale ionice cu forțe electrostatice



are legături covalente nepolare. Legătura $\text{C}-\text{H}$ este legătura σ formată din orbitalii s și sp^3 . Legătura $\text{C}-\text{C}$ este legătura σ formată din sp^3 cu sp^3 are lungimea de $1,54 \text{ \AA}$. Formează, cristale moleculare cu forțe Van der Waals.

e) $\text{H}_2\text{C}^1 = \text{CH}^2 - \text{C}^3 \equiv \text{N}$: legături covalente polare, conține legături eterogene.

Legăturile C_1-H și C_2-H sînt σ formate din s și sp^2 .

Legătura între carbon 1 și carbon 2 este legătura dublă formată dintr-o legătură σ (sp^2 cu sp^2) și o legătură π (p_y cu p_z). Are lungimea de $1,34 \text{ \AA}$.

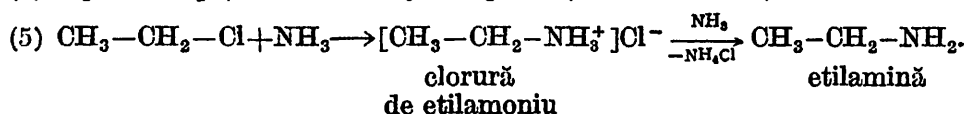
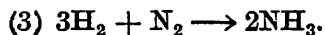
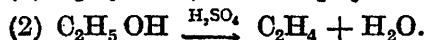
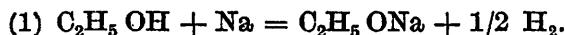
Legătura C_2-C_3 este o legătură σ formată din sp^2 și sp . Legătura carbon-azot este triplă legătură compusă dintr-o legătură σ (sp cu sp) și 2 legături π (p_z cu p_z și p_y cu p_y). Substanța formează cristale moleculare cu forțe dipol-dipol.

II.20. a) $Mx = d \cdot M \text{ aer}$;

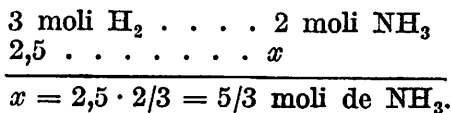
$$Mx = 0,069 \cdot 28,9 \approx 2 \text{ este deci } \text{H}_2;$$

$$Mc = 28,9 \cdot 0,968 = 28 \text{ este deci etena.}$$

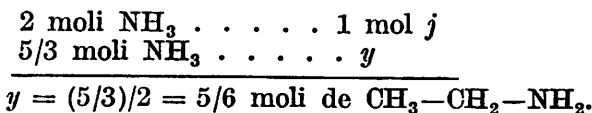
$$Mf = 0,588 \cdot 28,9 = 17 \text{ este deci amoniac.}$$



b) $56/22,4 = 2,5$ moli de H_2 care dau după cum reiese din ecuația (3)



$5/3$ moli de amoniac vor da (din ecuația (5))

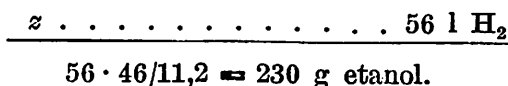


Dar randamentul este 90%.

np de $CH_3-CH_2-NH_2 = (90/100) \cdot (5/6) = 30/40 = 3/4 = 0,75$ moli.

$$mp = 0,75 M = 0,75 \cdot 45 = 33,75 \text{ g.}$$

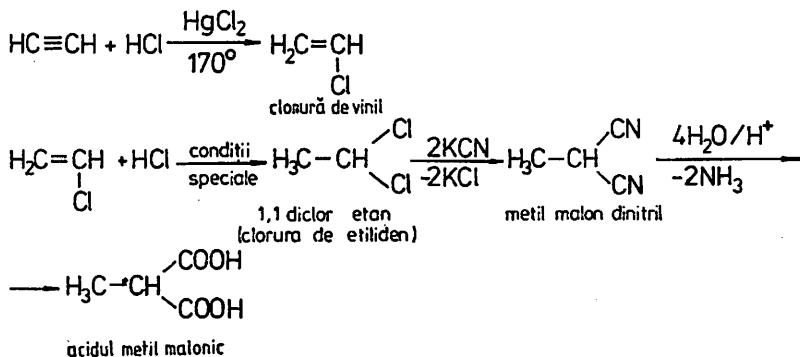
c) 1 mol C_2H_5OH (46 g) 11,2 l H_2



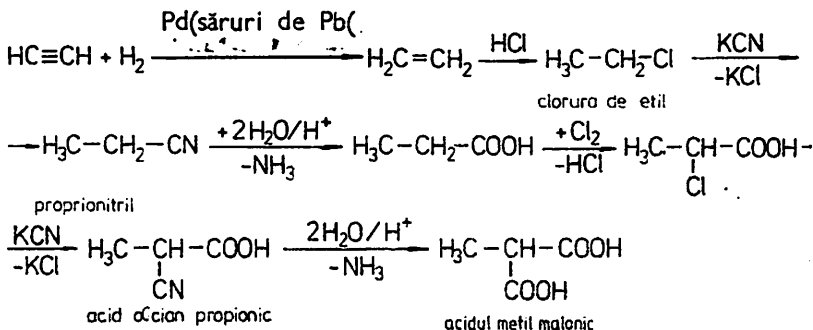
d) Sinteza NH_3 în industrie din care se fabrică acid azotic, îngrășă-minte pe bază de azot, medicamente.

II.21. Indicație.

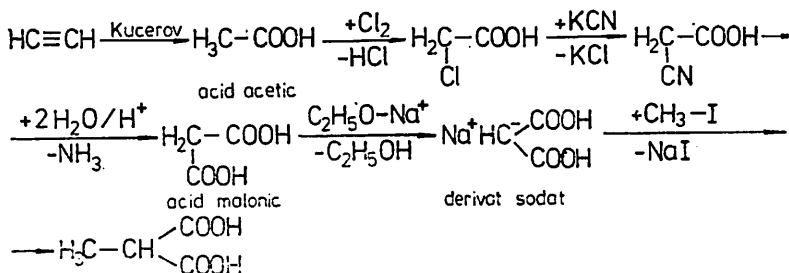
a) *Varianta I.*



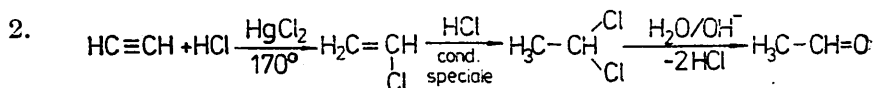
Varianta a II-a.



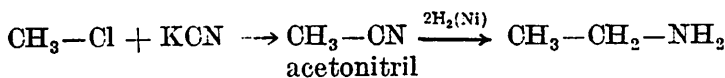
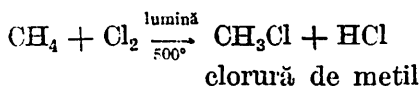
Varianta a III-a — care cuprinde și reacții care nu sînt în manual :



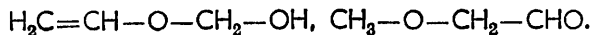
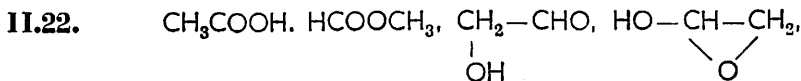
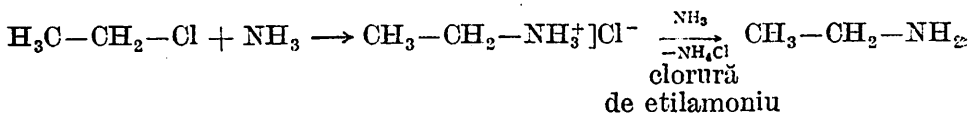
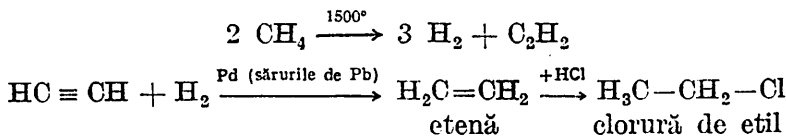
b) 1. Metoda Kucarov.



c) *Varianta I.*



Varianta a II-a.



II.23. a) $a = \text{H}_2\text{SO}_4$, $b = \text{CuSO}_4$, $c = \text{SO}_2$, $d = \text{H}_2\text{O}$, $e = \text{Cu}(\text{OH})_2$, $f = \text{Na}_2\text{SO}_4$, $g = \text{CuO}$, $h = \text{CuCl}_2$, $i = \text{SO}_3$.

b) 16 g CuO, 27 g CuCl₂.

c) $\alpha = \text{nr. moli de acid ionizați/nr. moli dizolvați} \cdot 100 = 5 \cdot 100 / (3 + 5) = 62,5\%$.

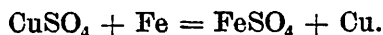
d) $[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-14} / [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-14} / 2 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-11}$

așa deci, $[\text{OH}^-] < [\text{H}_3\text{O}^+]$, soluția are caracter acid (normal pentru hidroliza CuCl₂).

II.24. În volume 25% CH₄ și 75% C₂H₆.

În procente de masă 17,23% CH₄ și 82,77% H₆.

II.25. Indicație. $m_{\text{CuSO}_4} = m \cdot V_{\text{sol}} \cdot M_{\text{CuSO}_4} = 1 \cdot 0,25 \cdot 160 = 40 \text{ g}$.
Notăm cu m masa plăcuței din Fe



În final $12 = m - m_r + m_{\text{Cu}}$:

$$\frac{160}{40} = \frac{56}{m_r} ; m_r = \frac{40 \cdot 56}{160} = 14 \text{ g} ;$$

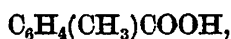
$$\frac{160}{40} = \frac{64}{m_{\text{Cu}}} ; m_{\text{Cu}} = \frac{40 \cdot 64}{160} = 16 \text{ g},$$

$$m_{\text{inițial}} = 12 + 14 - 16 = 10 \text{ g}.$$

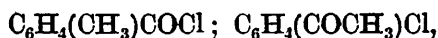
II.26. $M_{\text{clorură}} - M_{\text{acid}} = (13,6/100) \cdot M_{\text{acid}}$

$$35,5 - 17 = 18,5 ; 18,5 = (13,6/100) \cdot M_{\text{acid}} \Rightarrow M_{\text{acid}} = 136 \text{ g}.$$

$$M_{\text{C}_n\text{H}_{2n-7}\text{COOH}} = 136, n = 7, \text{C}_7\text{H}_7 - \text{COOH},$$



o, m, p

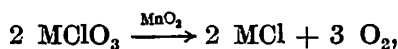


o, m, p *o, m, p*



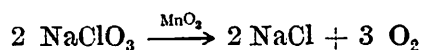
o, m, p

II.27. NaClO_3 , 60,46 l



$$3 \cdot 16 \text{ g oxigen} = \frac{45,07}{100} M_{\text{MClO}_3} \Rightarrow M_{\text{MClO}_3} = 106,5 \text{ g},$$

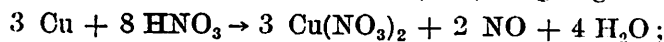
$$106,5 = M + 35,5 + 48, M = 23 \text{ g} - \text{este Na},$$



$$m_{\text{pur}} = (96,8/100) \cdot 220 = 212,96$$

$$n = 2 \text{ moli}, V_0 = 67,21, V_0 = (90/100) \cdot 67,2 = 60,48 \text{ l}.$$

II.28. $(22,86/100) \cdot a$ g cupru; $(77,14/100) \cdot a$ g argint.



$$\frac{3 \cdot 64}{\frac{22,86}{100} \cdot a} = \frac{2 \cdot 22,4}{V_1}, \quad V_1 = 0,0533 \cdot a \text{ l};$$

$$\frac{3 \cdot 108}{\frac{77,14}{100} \cdot a} = \frac{22,4}{V_2}, \quad V_2 = 0,0533 \cdot a \text{ l},$$

$$2 a \cdot 0,0533 = 2,986, \quad a = 2,986/0,1066 = 28 \text{ g},$$

$$m_{\text{Cu}} = 6,4 \text{ g}, \quad 0,1 \text{ atomi}; \quad m_{\text{Ag}} = 21,6 \text{ g}, \quad 0,2 \text{ atomi}; \quad n_{\text{Ag}}/n_{\text{Cu}} = 2/1$$

II.29. $\text{Zn} + \text{S} = \text{ZnS}; \quad \text{ZnS} + 2\text{HCl} = \text{ZnCl}_2 + \text{H}_2\text{S},$

$$7 \text{ g ZnS}/m = 22,4/2,4, \quad m = 10,39 \text{ g},$$

$$97 \text{ g ZnS} \dots 65 \text{ g Zn} \dots 32 \text{ g S}$$

$$10,39 \text{ g} \dots m_{\text{Zn}} \dots m_{\text{S}}$$

$$100 \text{ g} \dots C_1 \dots C_2$$

$$m_{\text{Zn}} = 6,96 \text{ g}, \quad m_{\text{S}} = 3,42 \text{ g}, \quad C_1 = 66,98\%, \quad C_2 = 33,02\%.$$

II.30. $M_x\text{CO}_3 \rightarrow \text{CO}_2 + M_x\text{O}$

$$m_{\text{CO}_2} = (52,38/100) \cdot 16,8 = 8,799 \text{ g},$$

$$44 \text{ g CO}_2/8,799 = M/16,8, \quad M = 84 \text{ g},$$

$$M = M_x + 60, \quad M_x = 24 \text{ este deci Mg};$$



$$84/100 = 24/x, \quad x = 28,57\% \text{ Mg},$$

$$84/100 = 12/y, \quad y = 14,28\% \text{ C}, \quad z = 57,14\% \text{ O}.$$

II.31. $440/22,4 = 19,64$ moli, $m_{\text{HCl}} = 19,64 \cdot 36,5 = 716,86 \text{ g},$

$$500/22,4 = 22,32 \text{ moli}, \quad m_{\text{HCl}} = 22,32 \cdot 36,5 = 814,68 \text{ g},$$

$$c = (716,86/m_s) \cdot 100,$$

$$m_s = 1000 \text{ ml} \cdot 1,21 = 1210 \text{ g sol}, \quad c = 176,86 \cdot 100/1210 = 59,24\%;$$

$$1000 \text{ g apă} \dots 814,68 \text{ g}$$

$$100 \dots S_1$$

$$S_1 = 81,468 \text{ g}/100 \text{ g apă};$$

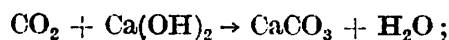
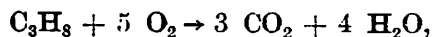
$$1000 \text{ g apă} \dots 716,86 \text{ g HCl}$$

$$100 \text{ g} \dots S_2$$

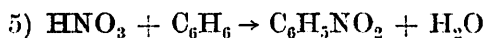
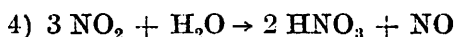
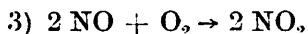
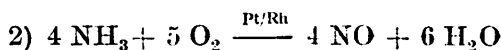
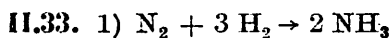
$$S_2 = 71,686 \text{ g}/100 \text{ g apă};$$

II.32. a) CO_2 ; C_3H_8

b) 0,2 moli CO_2 ; 0,2 moli C_3H_8



$$\begin{aligned} \text{c) } 1 \text{ mol } \text{C}_3\text{H}_8 & \dots\dots\dots 5 \cdot 22,4 \text{ l O}_2 \\ 0,2 \text{ moli } \text{C}_3\text{H}_8 & \dots\dots\dots x \\ \Rightarrow x = 22,4 \text{ l O}_2, V_{\text{aer}} = 5 \cdot V_{\text{O}_2} = 112 \text{ l aer.} \end{aligned}$$



b) $12 \cdot 28 \text{ g N}_2 \dots\dots\dots 8 \cdot 115 \text{ g C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$

$8,4 \text{ g N}_2 \dots\dots\dots x$

$c_t = x = 8,4 \cdot 8 \cdot 115 / 12 \cdot 28 = 23 \text{ g h,}$

$\eta = \eta_4 \cdot \eta_5 = 90 \cdot 90 / 100 \cdot 100 = 81\%$

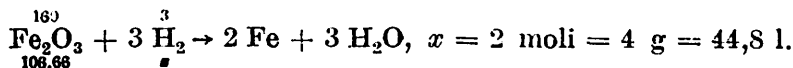
$\eta = (c_p / c_t) \cdot 100, c_p = \eta \cdot c_t / 100 = 81 \cdot 23 / 100 = 18,63 \text{ g C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$
rezultat.

II.34. Se folosește: $x = \text{nr. moli H}_2$; $y = \text{nr. moli alcani inferior}$, $4y = \text{nr. moli alcan superior}$.

Folosim $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ formula alcanului inferior și $\text{C}_{n+1}\text{H}_{2n+4}$ formula alcanului superior.

$$\begin{cases} 2x + y M_{\text{C}_n\text{H}_{2n+2}} + 4y \cdot M_{\text{C}_{n+1}\text{H}_{2n+4}} = 72 \\ 22,4x + 22,4 \cdot 5y = 100,8 \end{cases}$$

$x = 2 \text{ moli H}_2$ (4 g H_2 ; $44,8 \text{ l H}_2$), valoare obținută din ecuația de reducere a Fe_2O_3 .



Deci: cu $x = 2$ rezultă

$$\begin{cases} 4 + (14n + 2)y + 4(14n + 16)y = 72 \\ 44,8 + 112y = 100,8 \end{cases}$$

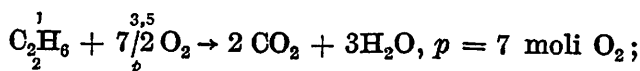
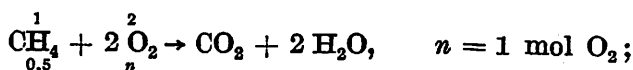
Cu soluțiile: $n = 1, y = 0,5$; adică alcani sînt: $\begin{matrix} \nearrow \text{CH}_4 \\ \searrow \text{C}_2\text{H}_6 \end{matrix}$ aflați în raportul 1:4.

a) Deci amestecul conține:

	<i>M</i>	<i>m</i> (g)	nr. moli	volum (l) (c.n.)
H_2	2	4	2	44,8
CH_4	16	8	0,5	11,2
C_2H_6	30	60	2	44,8
TOTAL	—	72	4,5	100,8

b) $X_{\text{H}_2} = (2/4,5) \cdot 100 = (20/45) \cdot 100 = (4/9) \cdot 100 = (400/9) = 44,4\%$.

c) Ecuațiile de ardere sint :



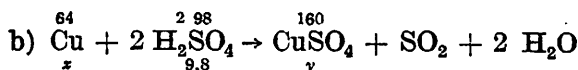
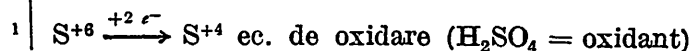
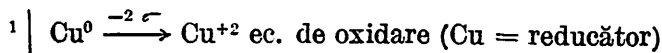
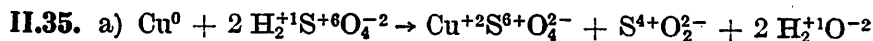
$$V_{\text{O}_2} = 1 + 1 + 7 = 9 \text{ moli O}_2,$$

$$V_{\text{aer}} = 45 \text{ moli aer adică } 45 \cdot 22,4 = 100 \cdot 8 \text{ l aer}, \quad V_{\text{p aer}} = (100/80) \cdot 1008 = 1260 \text{ l}.$$

d) $a = 25\%$. Din 72 g amestec avem hidrogen reprezentat de :

H_2	4 g	}	total 18 g H
CH_4	2 g		
C_2H_6	12 g		

72 g amestec	 18 g H
100 g amestec	 a
a = 25%.	



$$x = 3,2 \text{ g Cu}, \quad y = 8 \text{ g CuSO}_4.$$

Soluția I conține $\begin{cases} 8 \text{ g CuSO}_4 \\ 32 \text{ g H}_2\text{O} \end{cases}$, deci $C_I = (8/40) \cdot 100 = 20\%$.

c) La amestecare $m_{a_1} = 8 \text{ g}$ se adaugă la $m_{a_2} = C_2 \cdot m_{s_2}/100 = 40,160/100 = 64 \text{ g CuSO}_4$.

Deci soluția II conține :

$$64 \text{ g CuSO}_4 + 96 \text{ g H}_2\text{O} = 160 \text{ g soluție}.$$

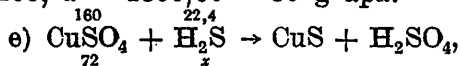
Pe total, amestecul I + II conține :

8 + 64 =	72 g CuSO ₄
32 + 96 =	128 g apă
200 g soluție finală	

$$C_f = (m_{af}/m_{sf}) \cdot 100 \text{ adică } C_f = (72/200) \cdot 100 = 36\%.$$

d) Pentru a mări concentrația după evaporare la 60% e necesar ca o parte din apa din soluție să se evapore. Fie x = masa de apă ce se evaporă; $C_{\text{evap}} = (m_{af}/(m_{sf} - x)) \cdot 100$,

unde C_{evap} este concentrația soluției după evaporare, m_{af} — masa dizolvatului de la punctul c), m_{sf} — masa soluției de la punctul c), adică $60 = [72/(200 - x)] \cdot 100 \Leftrightarrow 60(200 - x) = 7200$, de unde $12000 - 60x = 7200$, $x = 4800/60 = 80$ g apă.



$$x = 72 \cdot 22,4/160 = 10,08 \text{ l H}_2\text{O (c.n.)},$$

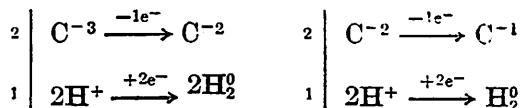
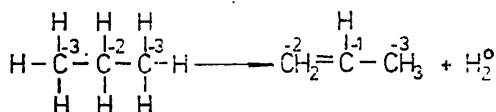
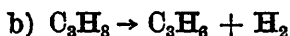
$$p_0 V_0/T_0 = p_1 V_1/T_1, V_1 = p_0 V_0 T_1/T_0 p_1 = 1 \cdot 10,08 \cdot 300/273 \cdot 1,5 = 1008 \cdot 3/273 \cdot 1,5 = 2016/273 \approx 7,3 \text{ l H}_2\text{S},$$

unde: $p_0 = 1$ atm, $V_0 = 10,08$ l, $T_0 = 273$ K, $p_1 = 1,5$ atm, $V_1 = ?$
 $T_1 = 300$ K.

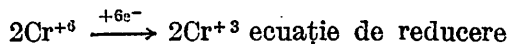
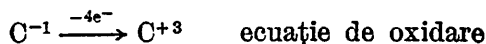
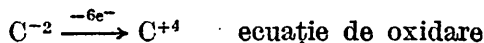
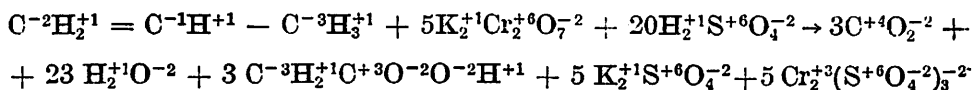
$$\text{II.36. a) } M_{\text{alcân}} = M_{\text{CO}_2} \cdot d_{\text{CO}_2} = 44 \cdot 1 = 44,$$

$$M_{\text{C}_n\text{H}_{2n+3}} = 44 \Rightarrow 12n + 2n + 2 = 44 \Rightarrow 14n = 42 \Rightarrow n = 3.$$

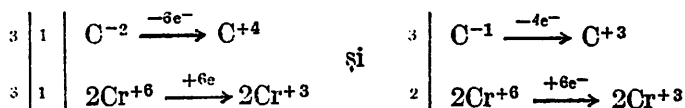
A) H_2 ; B) $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CH}_3$; C) CO_2 .



deci, egalitatea există deja.



grupare



c) $n_{\text{alcan}} = 0,009$ moli,
 $n_{\text{H}_2} = 0,009 \cdot 75/100 = 0,009 \cdot 3/4 = 0,027/4 = 0,00675$ moli,
 $n_{\text{C}_3\text{H}_6} = 0,00675$ moli,
 $n_{\text{CO}_2} = 0,00675$ moli,
 $V_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7}$ se determină din relația:
 $m = n/V_s$ dar $V_s = m/n = 0,01125/0,5 = 0,0225$ l = 22,5 cm³.

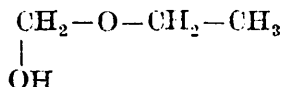
Calcularea $n_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7}$ $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ moli } \text{C}_3\text{H}_6 \dots\dots\dots 5 \text{ moli } \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \\ 0,00675 \text{ moli } \text{C}_3\text{H}_6 \dots\dots\dots x \\ x = \frac{0,00675 \cdot 5}{3} = 0,01125 \text{ moli } \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \text{ pur.} \end{array} \right.$

II.37. 1.1) $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_2$, 2) $\text{HOCH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2\text{OH}$, 3) $\text{CH}_3-\underset{\text{OH}}{\underset{|}{\text{CH}}}-\underset{\text{OH}}{\underset{|}{\text{CH}_2}}$

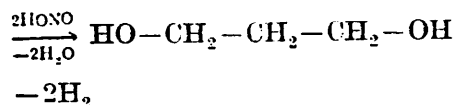
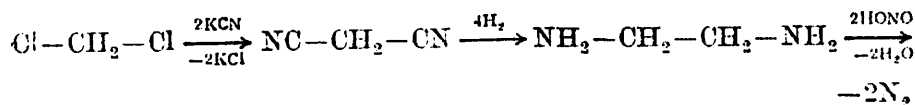
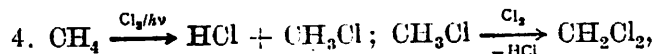
2. dioli : 1, 2 și 1, 3.

3. dieteri : $\text{CH}_3-\text{O}-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_3$.

Hidroxieteri : $\text{CH}_3-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{OH}$; $\text{CH}_3-\text{O}-\underset{\text{OH}}{\underset{|}{\text{CH}}}-\text{CH}_3$;

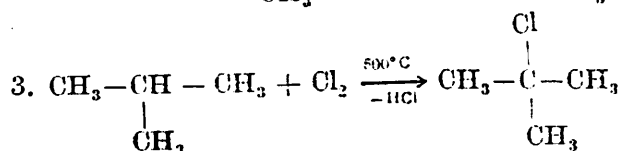
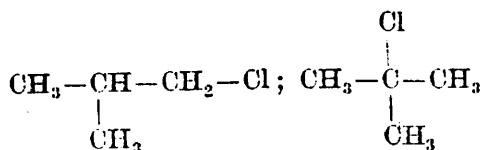


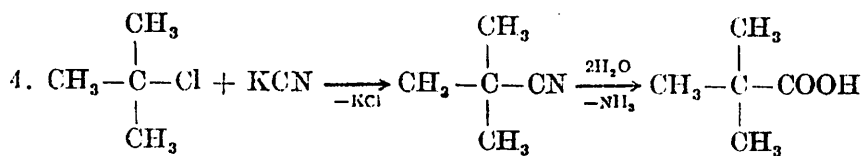
Hidroperoxizi : $\text{CH}_3-\underset{\text{O}-\text{O}-\text{H}}{\underset{|}{\text{CH}}}-\text{CH}_3$, $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\underset{\text{O}-\text{O}-\text{H}}{\underset{|}{\text{CH}_2}}$



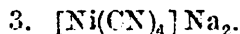
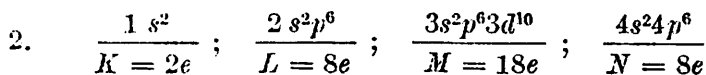
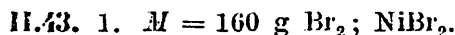
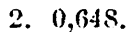
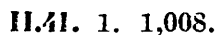
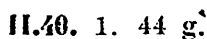
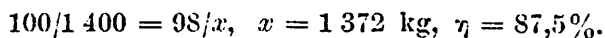
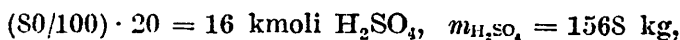
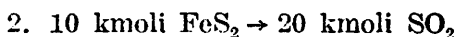
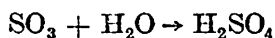
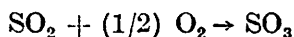
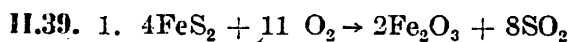
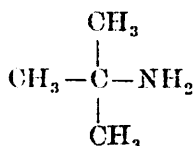
II.38. 1. $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{Cl}/35,5 = 100/38,37$, $n = 4$, $\text{C}_4\text{H}_9\text{Cl}$.

2. $\text{CH}_3-(\text{CH}_2)_2-\text{CH}_2\text{Cl}$; $\text{CH}_3-\underset{\text{Cl}}{\underset{|}{\text{CH}}}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$;





acid trimetil-acetic



Redactor: EUGEN MARINEANU
Tehnoredactor: MAGDALENA IACOB
Coperta de: EUGEN STOIAN

Bun de tipar: 25.07.1987. Coli tipar: 16

C.Z.: Bibl. mari {51(076) = 59
 {53/54(076) = 59



c. 60 — I. P. Informația
str. Brezoianu 23 — 25
București

Prin rezolvările originale și detaliate — prin mai multe metode — ale subiectelor date la concursurile de admitere în treapta a doua de liceu și prin testele propuse, cu indicații și răspunsuri, cartea se deosebește de celelalte lucrări apărute și constituie un model operațional pentru stimularea creativității și inventivității elevilor. Volumul se adresează atât elevilor din clasele IX—X de liceu, cât și profesorilor cărora le poate fi de un real folos în activitatea la catedră.